# 1. Vektory

1. Vypočítejte délku dané úsečky a souřadnice jejího středu.

1. AB, A[3;4], B [5;2]
2. CD, C[3;0], D [4;10]
3. EF,E [4;1], F [4;8]
4. GH, G[3;-1], H [5;-5]

$$\left[\begin{array}{c}a)\left|AB\right|=2\sqrt{2} , S=\left[4;3\right], b) \left|CD\right|=\sqrt{101 }, S=\left[\frac{7}{2},5\right], \\c) \left|EF\right|=7, S=\left[4;\frac{9}{2}\right], d) \left|GH\right|=2\sqrt{5} , S=\left[4;-3\right]\end{array}\right]$$

2. Vypočítejte souřadnice vektoru daného dvěma body a urči jeho velikost.

1. ***u = AB***, A[-4;-5], B [2;1]
2. ***v = CD***, C[-6; 1], D [-2;-3]
3. ***w = EF***, E[-4;2], F [-1;-3]
4. ***t = GH***, G[8;-5], H [2;3]

 [a) ***u =*** (6 ; 6) , $\left|u\right|=6\sqrt{2}$ b) ***v =***  (-8; -4) , $\left|v\right|=4\sqrt{5}$

c) ***w =*** (3; -5) , $\left|w\right|=\sqrt{34}$ d) ***t*** = (-6; 8 ) , $\left|t\right|=10$]

3. Urči souřadnice vektorů ***-2v, 0,25v, v + u , 2u –v***

***u = (*** -4; 5 ***), v = (***-1; -2***)***

4. Urči, zda jsou dané vektory lineárně závislé či lineárně nezávislé.

1. ***u =*** $\left(\frac{3}{4}; -5\right)$ ***v =*** $\left(0,6;-4\right)$
2. ***u =*** $\left(5; 2,5\right)$ ***v =*** $\left(-2,5;-\frac{5}{4}\right)$
3. ***u =*** $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}\right)$ ***v =*** $\left(\frac{2}{5};-\frac{3}{20}\right)$
4. ***u =*** $\left(\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}\right)$ ***v =*** $\left(\frac{4}{3}; -\frac{6}{8}\right)$

[a) LZ, k = $\frac{4}{5}, b) LZ, k= -\frac{1}{2} , c) LZ, k= \frac{3}{5}$ , d) LNZ]

5. Vypočítejte skalární součin vektorů:

1. ***u = (*** -3; -1 ***), v = ( 4***; -2***)***
2. ***u = (*** -1; 1 ***), v = (***1; -1***)***
3. ***u = (*** -2; -3 ***), v = (*** 7; 0,2***)***
4. ***u = (*** $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$ ***), v = (***$\sqrt{6}$; -2***)***

[a) -10, b) -2, c) -14,6, d) $\sqrt{12}-2\sqrt{6}$]

6. Určete velikost úhlu mezi vektory:

1. ***u = (*** 3; -5 ***), v = (***10; 6***)***
2. ***u = (*** -1; 1 ***), v = (***0; 3***)***
3. ***u = (*** -2; -2 ***), v = (4***; 0***)***
4. ***u = (*** 9; -5 ***), v = (***-2; 5***)***

[a) α = 90°, b) α= 45°, c) α = 45° , d) α= 39°08´ ]

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory na sebe kolné.

1. ***u = (*** -5; 8 ***), v = (***2; 1,25***)***
2. ***u = (*** 4; 1 ***), v = (*** 1; 4***)***
3. ***u = (*** $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$ ***), v = (***6; -$\sqrt{3}$***)***
4. ***u = (*** -5; 0 ***), v = (*** 0; 3***)***

[a) ano, b) ne, c) ano, d) ano]

8. Jsou dány vektory ***u = (*** 3; -2 ***), v = (***-1; b***).*** Určete parametr ***b*** tak, aby platilo:

1. ***u⊥ v***
2. ***u ∥ v***
3. ***u = -3v***
4. $\left|u\right|$ **=** $\left|v\right|$

[a) b = $\frac{-3}{2}$, b) b = $\frac{2}{3} , c) b= \frac{2}{3} , d) b=\pm 2\sqrt{3} $]

9. Najděte vektor ***u*** , který je kolmý na vektor ***u = (*** 3; 4 ***)*** a jehož velikost je 15.

[$u\_{1}$***= (*** 12; -9 ***),*** $u\_{2}$ ***= (***-12; 9 ***)***]

10. Dokažte, že trojúhelník ABC, A $\left[16;1; -2\right]$, B $\left[-9;1; -2\right]$, C $\left[0;1;10\right]$ je pravoúhlý. Vypočítejte jeho obvod, obsah, velikost vnitřních úhlů.

[skalární součin vektorů $\vec{AC}$. $\vec{BC}$= 0 ⇒ $\vec{AC}$⊥ $\vec{BC}$ ⇒ ABC je pravoúhlý trojúhelník, O = 60, S = 150, α= 36°52´, β = 53°08´γ = 90°]

11. Jsou dány body A $\left[0;1;2\right]$, B $\left[1;2;0\right]$ C $\left[2;0;1\right]$

1. Dokažte, že body A, B, C tvoří trojúhelník.
2. Vypočítejte velikost vnitřního úhlu 𝜶.
3. Vypočítejte délku těžnice na stranu a a souřadnice těžiště T.
4. Vypočítejte obvod trojúhelníku ABC
5. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC.

[a) vektory $\vec{AB} a \vec{AC} $ $jsou LNZ a tudíž body A, B, C, neleží v jedné přímce, Lze sestrojit$ trojúhelník ABC, b) α = 60°, c) $\left|t\_{a}\right|$ = $\left|AS\_{BC}\right|$ =$\frac{3}{2}\sqrt{2}$, T = $\left[1;1;1\right]$ , d)O = 3$\sqrt{6}$ , e) S =$\frac{3\sqrt{3}}{2}$]

# 2. Přímka

1. Určete normálový a směrový vektor přímky ***p***, pokud je dané:

1. ***p = AB,***  A $\left[-2;3\right]$, B $\left[4;5\right]$
2. ***p:*** x = -3 + 2t, y = 1 – 4t
3. ***p:***3x + 2y + 5 = 0
4. ***p:*** y = -$ \frac{3}{2}x+4$

[a) ***u =*** (6; 2), ***n =*** (-2;6) b) ***u =*** (2; -4), ***n =*** (4;2), c) ***u =*** (-2; 3), ***n =*** (3;2), d) ***u =*** (-2; 3), ***n =*** (3;2)]

2. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky p, která prochází body:

1. A $\left[-4; -2\right]$, B$\left[1;3\right]$
2. C $\left[0;4\right]$, D $\left[5;2\right]$
3. E$\left[-7;3\right]$, F$\left[-3;6\right]$
4. G $\left[10; -4\right]$ H $\left[4;3\right]$

[a) x= -4 + 5t, y = -2 + 5t; x –y + 2 = 0 ; y =x+ 2, b) x = 5t, y =4 – 2t; 2x + 5y – 20 = 0 ; y = $\frac{-2}{5}$x + 4, c) x = -7 ++ 4t, y = 3 + 3t, 3x- 4y + 33 = 0, y = $\frac{3}{4}x+\frac{33}{4}$, d) x = 10 + 6t, y = -4 + 7t, 7x + 6y – 46 = 0, y =- $\frac{7}{6}x+ \frac{23}{3}$]

3. Přímka p je dána vektorem (směrnicový nebo normálový) a bodem M. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky p:

1. M [-4;-3], ***u =***( 2; 5)
2. M [4;-1], ***u =***( 8; -5)
3. M [1;1], ***u =***( -2; -6)
4. M [7;3], ***u =***( 1; -2)

$$\left[a) x=-4+2t, y= -3+5t;5x-2y+14=0;y=\frac{5}{2}x+7\right]$$

$$\left[b) x=4+8t, y= -1-5t;5x+8y-12=0;y=-\frac{5}{8}x+\frac{3}{2}\right]$$

$$\left[c) x=1+3t, y= 1-t;x+3y-4=0;y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right]$$

$$\left[d) x=7+2t, y= 3+t;x-2y-1=0;y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right]$$

4. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky p, která prochází bodem N a svírá s osou x směrový úhel φ:

1. N [2; 5], φ ***=*** $\frac{3}{4}π$
2. N [-4;-2], 𝝋= $\frac{π}{4}$
3. N [0; 0], φ = 30°
4. N [0;-3], φ = $\frac{2}{3} π$
5. N [6;-2], φ = $\frac{π}{6}$

Nápověda: y = kx + q, k = tg φ, ax + by + c = 0 ⇒ y = $-\frac{a}{b}x- \frac{c}{b}$ ⇒ k = $-\frac{a}{b}$, q = $-\frac{c}{b}$

$$\left[a) x=2-t, y= 5+t;x+y-7=0;y=-x+7\right]$$

$$\left[b) x=-4+t, y= -2+t;x-y+2=0;y=x+2\right]$$

$$\left[c) x=3t, y=\sqrt{3}t;\sqrt{3}x-3y=0;y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\right]$$

$$\left[d) x=t, y= -3-\sqrt{3}t;\sqrt{3}x+y+3=0;y=-\sqrt{3}x-3\right]$$

$$\left[e) x=6+3t, y= -2+\sqrt{3}t;\sqrt{3}x-3y-6(1+\sqrt{3)}=0;y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2(1+\sqrt{3})\right]$$

5. Převeďte rovnici na obecný tvar a směrnicový tvar:

1. x = 2 + 3t, y = 1 – t
2. x = - 2 – 4t, y = 3t
3. x = 5 $-\frac{t}{3}$, y = 2 + t
4. x = -$\sqrt{2}$ – t, y = 6 + t

$$\left[\begin{array}{c}a) x+3y-5=0;y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}; b) 3x+4y+6=0;y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}; \\c) 3x+y-17=0;y= -3x+17; d) x+y+\sqrt{2}-6=0;y=-x+6-\sqrt{2}\end{array}\right]$$

6. Převeďte obecnou rovnici přímky na parametrický a směrnicový tvar:

1. x + y + 5 = 0
2. 2x – y + 4 = 0
3. -4x -5y = 0
4. 4x + 3y + 6 = 0

$$\left[\begin{array}{c}a) x=-t, y=-5+t;y=-x-5; b) x=t,y=4+2t; y=2x+4; \\c) x=5t. y=-4t; y=-\frac{4}{5}x; d) x=3t, y=-2-4t;y=-\frac{4}{3}x-2\end{array}\right]$$

7. Převeďte směrnicový tvar rovnice přímky na parametrický a obecný tvar:

1. y = 3x – 2
2. y = $-\frac{4x}{5}$
3. y = x – 5
4. y = $-\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$

$$\left[\begin{array}{c}a) x=1+t, y=1+3t; 3x-y-2=0, b) x=-5t, y=4t; 4x+5y=0; \\\\c) x=t, y=-5+t; x-y-5=0; d) x=4t, y= \frac{3}{2}-t; x+4y-6=0\end{array}\right]$$

8. Urči obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází bodem M a je rovnoběžná s danou přímkou p:

1. M [2; -1], p : x + 2y – 4 = 0
2. M [1; -4], p : 3x - y – 2 = 0
3. M [0; 0], p : -6x + 5y – 7 = 0
4. M [5; 2], p : $\frac{x}{2}$ $-\frac{y}{3}$ = 0

$$\left[\begin{array}{c}a) x+2y=0;y=-\frac{1}{2}x, b) 3x-y-7=0;y=3x-7, \\c) 6x-5y=0;y=\frac{6}{5}x; d) 3x-2y-11=0, y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}\end{array}\right]$$

9. Urči obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází bodem N a je kolmá na danou přímkou p:

1. M [1; 2], p : 5x - 2y – 3 = 0
2. M [0; 0], p : - x + 4y – 2 = 0
3. M [-1; -4], p : 2x + 7y = 0
4. M [-2; -3], p : 1,5x + 2y + 3 = 0

$$\left[\begin{array}{c}a) 2x+5y-12=0;y= -\frac{2}{5}x+\frac{12}{5}; b) 4x+y=0; y=-4x; \\c) 7x-2y-1=0; y=\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}; d) 4x-3y-1=0; y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

10. Určete směrový úhel dané přímky p:

1. y = x + 2
2. y = x$\sqrt{3}$ $-\frac{1}{3}$
3. y = 2x – 3
4. y = $-\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}$

# $$\left[a) φ=\frac{π}{4}=45°, b)φ=\frac{π}{3}=60°, c) φ≅0,35π≅63°26´, d) φ≅0,2π≅36°52´ \right]$$

11. Dáno A [3; 2], B [-1; -1], ***u*** = C – B = (12, -5)

1. Určete souřadnice bodu C.
2. Dokažte, že body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku.
3. Napište obecné rovnice přímek, na kterých leží strany trojúhelníku ABC.
4. Napište obecné rovnice přímek, na kterých leží těžnice trojúhelníku ABC.
5. Napište obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky trojúhelníku ABC.
6. Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází středy úseček AC, BC.
7. Napište směrnicovou rovnici přímky, která prochází bodem A a je rovnoběžná s BC.
8. Určete souřadnice těžiště T.
9. Vypočítejte obvod trojúhelníku ABC.
10. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC.

$\left[a) C= \left[11;-6\right], \right]$

[$b) vektory $ $\vec{AB} a \vec{AC} jsou LNZ ⇒různoběžné ⇒body A, B, C neleží na jedné přímkce ⇒$ body ABC jsou vrcholy trojúhelníku]

[c) a: 5x + 12y + 17 = 0; b: x + y – 5 = 0;. c: 3x – 4y – 1 = 0]

[d) $t\_{a }:11x+4y-41=0, t\_{b}: x+8y+9=0, t\_{c }:13x+20y-23=0. $]

[e) $v\_{a }:12x-5y-26=0, v\_{b }: x-y=0, v\_{c}:4x+3y-26=0. $]

[f) x = 7 – 2t, y = - 2 - $\frac{3}{2}t$ , tϵR]

[g) y = $-\frac{5}{12}x+\frac{13}{4}$]

[h) T = $\left[\frac{13}{3};-\frac{5}{3}\right]$]

[i) O = 13 + 8$\sqrt{2}+5≅29,3$]

[j) S = 28]

12. Napište obecné rovnice os úseček AB, AC, CB pokud je A [2; 5], B [-3; 9], C [6; 12].

[$o\_{AB}:10x-8y+61=0$, $o\_{AC}:8x+14y-151=0$ , $o\_{BC}:3x+y-15=0$]

13. Dokažte, že body A [3; 4], B [-1; 2], C [1; 3], D [-5; 0], leží na jedné přímkce. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice této přímky.

[C∈$\vec{AB}∧D\in \vec{AB}⇒$ A, B, C, D leží na jedné přímce, parametrická rovnice: x = 3 – 4t, y = 4 – 2t, obecná rovnice: x – 2y + 5 = 0, směrnicový tvar y = $\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$]

1

14. Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází bodem A [4; -1; 9] a je rovnoběžná:

1. s osou x
2. s osou y
3. s osou z

[a) x = 4 + t, y = -1, z = 9; b) x = 4, y = -1 + t, u = 9, c) x = 4, y = -1, z = 9 + t]

15. Určete vzdálenost bodu od přímky:

1. A [-1; -1], p: x + y = 0
2. A [ 7; 0], p: x - 2y + 4 = 0
3. A [1; 5 ; 5], t = XZ, X [1; 2; 4], Y [0; 5; 5],
4. A [ -2; 3; 1], p: x = 9 + 4t, y = -2 – t, z = 2 + 3t
5. A [ 6; -6; 5], p: x = t, y = 2 + t, z = 1 - t

[a] d = $\sqrt{2}, b) d= \frac{11\sqrt{5}}{5}≅4,92, c) d= \frac{\sqrt{110}}{11}$, d) d = $\sqrt{43}, e) d=6$]

# 3. Vzájemná poloha přímek

1. Rozhodněte o vzájemné poloze dvou přímek:

1. p: 4x – y + 11 = 0, q: -x - 4y +11 = 0
2. p: 2x + 3y - 4 = 0, q: -x $-\frac{3}{2}$y +2 = 0
3. p: x + 5y - 5 = 0, q: $\frac{2}{5}x$ - 5y +5 = 0
4. p: - x – $\frac{1}{2}y$ = 0, q : $\frac{x}{2}$ + 2y = 0
5. p: -x + 3y - 7 = 0, q : $\frac{x}{2}-\frac{3}{2}y+2=0$
6. p: - 4x + 2y $\sqrt{3}$+ 5 = 0, q : x$\sqrt{3}+2y-\frac{1}{2}=0$
7. p: -2x + 2y + 3 = 0, q : x - y + 6 = 0
8. p:$\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$, q : $-\frac{y}{2}+2\sqrt{3}=0$

[a) přímky jsou na sebe kolmé, b) přímky jsou rovnoběžné totožné, c) přímky nejsou rovnoběžné ani kolmé, d) přímky nejsou rovnoběžné ani kolmé, e) přímky jsou rovnoběžné různé, f) přímky jsou na sebe kolmé, g) přímky jsou rovnoběžné různé, h) přímky jsou na sebe kolmé]

2. Určete vzájemnou polohu přímek, vypočítejte úhel mezi nimi a určete průsečík (pokud existuje):

1. p: 2x – y + 3 = 0, q: 3x – 4y + 5 = 0
2. p: x +5y + 9 = 0, q: 2x – 3y + 1 = 0
3. p: x = 1 + 4t, y = -t, q: x = 3 – 12s, y = -2 + 3s
4. p: x = 6 + 5t, y = 3 - 9t, q: x = 11 – 10s, y = -6 + 18s
5. p: x = 2 - t, y = 1 + t, z = -2 -t q: x = 1 + s, y = s, z = 5 + s
6. p: x = 10 + 10t, y = 2 + 2t, z = 11 + 11t q: x = 1 + 3s, y = -2 - 12s, z = 4s
7. p: x = 1 - t, y = 2 + t, z = -6 -2t q: x = 4 + s, y = -1 - s, z = 2s
8. p: x = 3 - t, y = -2 + 2t, z = 3t q: x = 2 + s, y = 1 - s, z = 9 + 3s

[a ) p a q jsou různoběžné, φ= 26° ; 35´, P = $\left[-\frac{7}{5};\frac{1}{5}\right]$, b) p a q jsou různoběžné, φ= 45°, P = $\left[-\frac{32}{13};-\frac{17}{13}\right]$, c) p a q jsou rovnoběžné různé, φ= 0°, d) p a q jsou totožné, φ= 0°, e) p a q jsou mimoběžné, φ= 70° 32´ ; f) p a q jsou mimoběžné, φ= 59°50´,g) p a q jsou totožné, φ= 0°, h) p a q jsou různoběžné, φ= 61° 05´, P = $\left[1;2;6\right]$, ]

# 4. Rovina

1. Napište parametrickou rovnici přímky p, která prochází bodem A [2; -1; 2], kolmo k rovině ϱ: x – y + z + 13 = 0.

[p: x = 2 + t, y = -1 –t, z = 2 + t]

2. Napište parametrickou a obecnou rovnici roviny ϱ = ABC, A [-4; 0; 2], B [-2; 1 ; 1], C [1; -3; -2].

[x = -4 + 2t + 3s, y = t – 4s, z = 2 – t – 3s; 7x – 3y + 11z + 6 = 0 ]

3. Napište obecnou rovnici roviny α, která prochází bodem A [2;1; 4] a je rovnoběžná s rovinou β:x – 2y + 5z + d = 0.

[α:x – 2y + 5z – 20 = 0]

4. Napište obecnou rovnici roviny δ, která prochází bodem A [1; 2; 0] a je kolmá na přímku p: x = 3 – t, y = 4 + 2t, z = 1 – 2t.

[δ: x – 2y + 2z + 3 = 0]

5. Určete vzdálenost bodu od roviny:

1. A [-1; 6; 8], α: x + y + z = 0
2. A [ 2,5; 5; -2], β: x - 2y + 5z = 0

 [a] d = $\frac{13\sqrt{3}}{3}≅7,51, b) d= \frac{7\sqrt{30}}{12}≅3,2, ]$