

V. FUNKCE

PŘÍKLAD 24

Rozhodněte, která z tabulek určuje funkci:

a)

x	-5	-4	-2	0	-2	-4	-6	1	2	5
f(x)	-1	3	1	0	2	-3	1	3	7	-9

b)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	1	0	2	4	1	4	2	0	1

Řešení

a) Tabulka neurčuje funkci, neboť např. prvku -4 z množiny vzorů {-5; -4; -2; 0; -6; 1; 2; 5} přiřazuje tato tabulka dvě různá reálná čísla: 3 a -3. Také prvku -2 jako vzoru jsou přiřazeny dva různé obrazy: 1 a 2.

b) Tabulka určuje funkci, protože každému prvku definičního oboru {-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4} je přiřazeno právě jedno reálné číslo (např. k číslu -1 číslo 4, k číslu 3 jen číslo 0 atd.).

Úlohy

282 Rozhodněte, kterou z tabulek je určena funkce (v záporném případě uveďte, proč nejde o funkci):

a)

x	△	○	□	×	⊕	⊖
f(x)	0	1	2	3	4	5

b)

x	a	e	d	c	f	h	g
f(x)	-1	2	-1	2	-1	2	-1

c)

x	1	2	3	2	1	0	-1
f(x)	0	1	2	3	4	5	6

[a) ano; b) ano; c) ne, protože číslu $x = 1$ jsou přiřazeny dva různé obrazy 0 a 4]

PŘÍKLAD 25

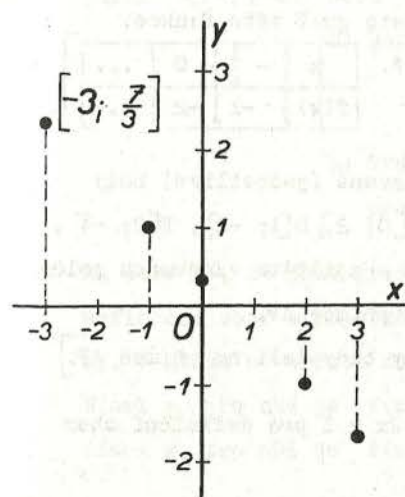
Je dána funkce $x \mapsto -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, jejíž definiční obor je

a) $D = \{-3; -1; 0; 2; 3\}$, b) D tvoří všechna reálná čísla x , pro něž platí $-3 \leq x < 3$. V obou případech sestrojte graf funkce.

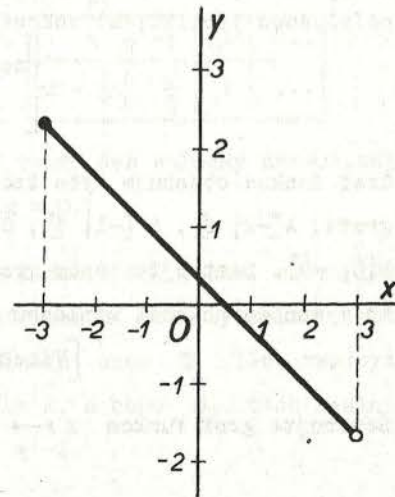
Řešení

a) Pro každé $x \in D$ vypočítáme funkční hodnotu; např. pro $x = -3$ je to: $-\frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Uspořádaná dvojice $[x, f(x)]$, tj. v našem případě $[-3; \frac{7}{3}]$, určuje jeden bod grafu v soustavě souřadnic s kolmými osami x, y . Další body grafu jsou $[-1; 1]$, $[0; \frac{1}{3}]$, $[2; -1]$, $[3; -\frac{5}{3}]$.

a)



b)



b) Graf bude obsahovat body jako v případě a) až na bod $[3; -\frac{5}{3}]$, protože číslo 3 do definičního oboru nepatří. Výpočtem funkčních hodnot pro další x z definičního oboru získáme y -ové souřadnice dalších bodů grafu. Např. pro $x = -2$ je $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$; dostaneme tak uspořádanou dvojici $[-2; \frac{5}{3}]$. Další bod grafu určí $[1; -\frac{1}{3}]$ atd. Protože definiční obor tvoří všechna reálná čísla x , pro která platí $-3 \leq x < 3$, vyplní body grafu úsečku (až na krajní bod $[3; -\frac{5}{3}]$).

Úlohy

283 Pro prvky definičního oboru $D = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ vypočtete funkční hodnoty funkce $x \mapsto -x + 1$. a) Sestavte příslušnou tabulku; b) zakreslete graf této funkce.

např.

x	-1	0	...
f(x)	2	1	...

284 Definiční obor funkce $x \mapsto -2x - 2$ je $D = \{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$. Určete odpovídající funkční hodnoty: a) sestavte příslušnou tabulku; b) zakreslete graf této funkce.

např.

x	$-\frac{1}{2}$	0	...
f(x)	-1	-2	...

285 Graf funkce obsahuje tyto izolované (jednotlivé) body grafu: A $[-2; 8]$, B $[-1; 5]$, C $[0; 2]$, D $[1; -1]$, E $[2; -4]$, F $[3; -7]$. Sestrojte tento graf a zjistěte vzájemnou polohu vyznačených bodů vzhledem k přímce AF.

[Všechny body leží na přímce AF.]

286 Sestrojte graf funkce $x \mapsto -2x + 1$ pro definiční obor

a) $D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$; b) tvořený všemi čísly x , pro něž platí $-3 \leq x \leq 2$.

a) Např.

x	-3	1	...
$-2x+1$	7	-1	...

graf tvoří izolované body,

b) graf tvoří úsečka MN s krajními body $M[-3; 7]$ a $N[2; -3]$.

287 Sestrojte graf funkce $x \mapsto -\frac{2}{x} + 1$ a) pro definiční obor $D = \{-2,5; -2; -1,5; -1; 1; \frac{1}{2}; 2\}$; b) tvořený reálnými čísly x , pro něž platí $-4 < x < 0$ nebo $0 < x < 4$.

a) Např.

x	-2	$\frac{1}{2}$	...
$-\frac{2}{x}+1$	2	-3	...

b) Graf tvoří dva oblouky nesouvislé pro $x = 0$.

288 Určete obor funkčních hodnot funkce $x \mapsto 2 - \frac{1}{x}$ a) pro x z definičního oboru $D = \{-3; -2,5; -1,5; -1; 1; \frac{1}{2}; 2\}$. b) Sestrojte graf této funkce pro reálná čísla x , pro něž platí $-3 \leq x < 0$ nebo $0 < x \leq 2$.

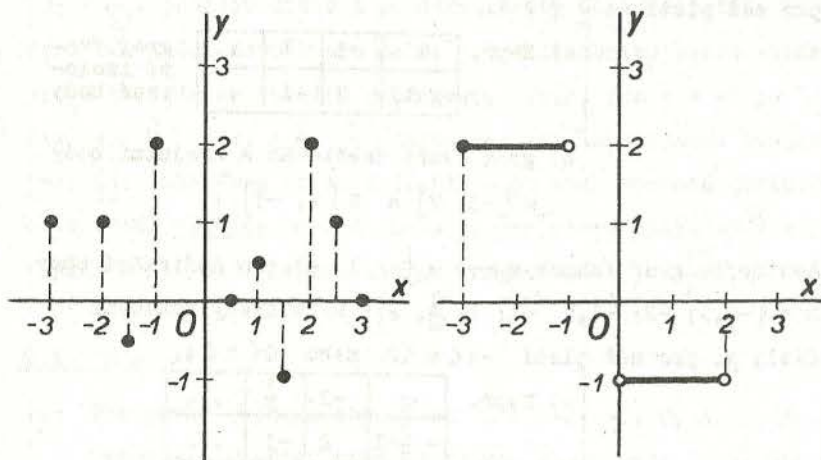
a) Např.

x	-3	1	...
$2 - \frac{1}{x}$	$\frac{7}{3}$	1	...

b) Graf tvoří dva oblouky nesouvislé pro $x = 0$.

289 Na obr. a), b) jsou grafy funkcí. Pro funkci a) zapište definiční obor a příslušné funkční hodnoty pomocí tabulky. V úloze b) určete definiční obor D_1 těch reálných čísel x , pro něž je $f(x) = 2$, a obor D_2 těch reálných čísel x , pro něž je $f(x) = -1$.

a) b)



Např. a)

x	-3	-1,5	0,5	...
f(x)	1	-0,5	0	...

b) $D_1: -3 \leq x < -1$, $D_2: 0 < x < 2$

290 Sestrojte graf funkce $x \mapsto x^2 - 3$ pro definiční obor

a) $D = \{-3; -2,5; -1; 0; 1; 1,5; 2\}$, b) $D = \mathbb{R}$ (množina reálných čísel).

Např. a)

x	-3	1,5	...
$x^2 - 3$	6	-0,75	...

b) Parabola s vrcholem $[0; -3]$.

291 Sestrojte pro definiční obor $D = \mathbb{R}$ grafy funkcí

a) $x \mapsto -x$; b) $x \mapsto -x - 2$; c) $x \mapsto -x + 2$.

Grafy funkcí jsou rovnoběžné přímky procházející body a) $[0; 0]$; b) $[0; -2]$; c) $[0; 2]$.

292 Sestrojte grafy funkcí s definičním oborem $D = \mathbb{R}$: a) $x \mapsto \frac{x}{2} + 1$; b) $x \mapsto -\frac{3}{2}x + 2$; c) $x \mapsto \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

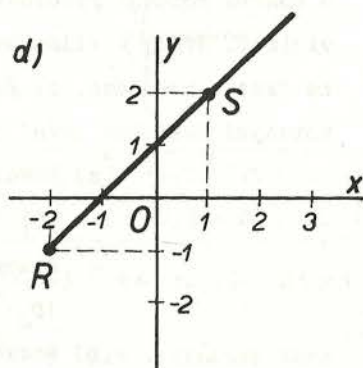
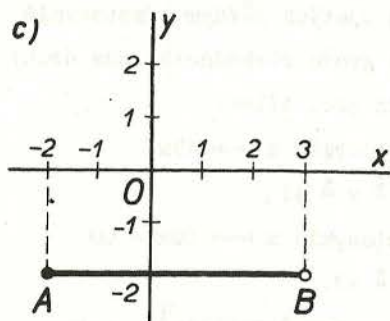
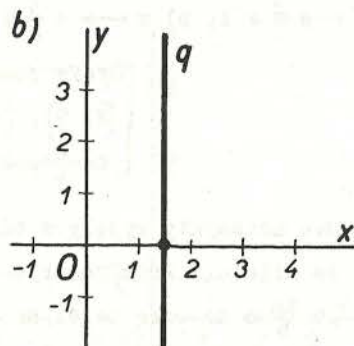
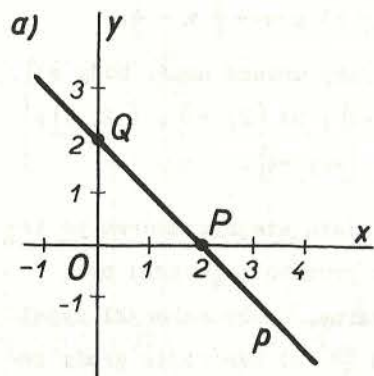
Grafy jsou přímky určené např. body a) $[2; 2]$, $[-4; -1]$; b) $[2; -1]$, $[-2; 5]$; c) $[4; 2,5]$, $[-2; -2]$.

293 Dva motocykly vyjely z téhož místa stejným směrem po téže silnici. Průměrná rychlost prvního motocyklu byla $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a do cíle dojel za 4 hodiny. Druhý motocykl vyjel o hodinu později rychlostí $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. a) Sestrojte grafy závislosti dráhy v kilometrech ujetých každým z motocyklů na čase v hodinách. b) Podle grafu rozhodněte, zda druhý motocykl dostihne první ještě před cílem.

a) První motocykl: $x \mapsto 45x$
 $(D_1: 0 \leq x \leq 4)$,
 druhý motocykl: $x \mapsto 60x - 60$
 $(D_2: 1 \leq x)$.
 b) Setkají se právě v cíli.]

PŘÍKLAD 26

Rozhodněte, na kterém z obrázků a), b), c), d) je znázorněn graf funkce. Pak určete příslušné definiční obory a zápisy těchto funkcí.



Řešení

a) Přímka p je grafem lineární funkce, jejíž zápis má tvar $x \mapsto ax + b$. Body o souřadnicích $[0; 2]$ a $[2; 0]$ leží v této přímce, a proto platí $Q[0; 2]: 0 \mapsto a \cdot 0 + b = 2$, tj. $b = 2$; $P[2; 0]: 2 \mapsto a \cdot 2 + b = 0$, tj. $2a + 2 = 0$ čili $a = -1$. Proto zápis funkce má tvar $x \mapsto -x + 2$, její definiční obor $D = R$, tj. množina všech reálných čísel; grafem je celá přímka p .

b) Přímka q není grafem funkce, neboť jedinému prvku definič-

ního oboru $x = 1,5$ nenapřazuje jako funkční hodnotu jediné číslo, nýbrž souřadnici y libovolného bodu přímky q .

c) Úsečka AB (bez krajního bodu B) je grafem konstantní funkce. Její definiční obor tvoří čísla x , pro něž platí $-2 \leq x < 3$, zápis pak $x \mapsto -2$.

d) Graf funkce tvoří polopřímka RS. Do jejího definičního oboru patří všechna x , pro něž platí $-2 \leq x$. Čísla a, b zápisu funkce $x \mapsto ax + b$ vypočítáme pomocí souřadnic bodů R a S.

$$R[-2, -1]: -2 \mapsto a \cdot (-2) + b = -1 \text{ tedy } a \cdot (-2) + b = -1$$

$$S[1, 2]: 1 \mapsto a \cdot 1 + b = 2 \text{ tedy } \underline{a \cdot 1 + b = 2}$$

Řešením soustavy těchto dvou rovnic pro neznámé a, b dostaneme $a = 1, b = 1$. Zápis funkce je tedy $x \mapsto x + 1$.

Úlohy

294 Graf funkce obsahuje body $P[-2; -\frac{5}{2}]$, $Q[-1; -\frac{3}{2}]$, $R[0; -\frac{1}{2}]$, $S[1; \frac{1}{2}]$, $T[2; \frac{3}{2}]$, $U[3; \frac{5}{2}]$. a) Sestrojte graf této funkce a na základě toho vyslovte domněnku, o jakou funkci jde. b) Pro definiční obor $D = R$ stanovte zápis této funkce.

[a) Izolované body ležící v přímce. b) Zápis funkce je $x \mapsto x - \frac{1}{2}$.

295 Určete čísla a, b v zápisu funkce $x \mapsto ax + b$ s definičním oborem $D = R$, jejíž graf obsahuje body a) $A[1; 2]$, $B[4; -1]$; b) $C[3; 2]$, $D[-2; -8]$.

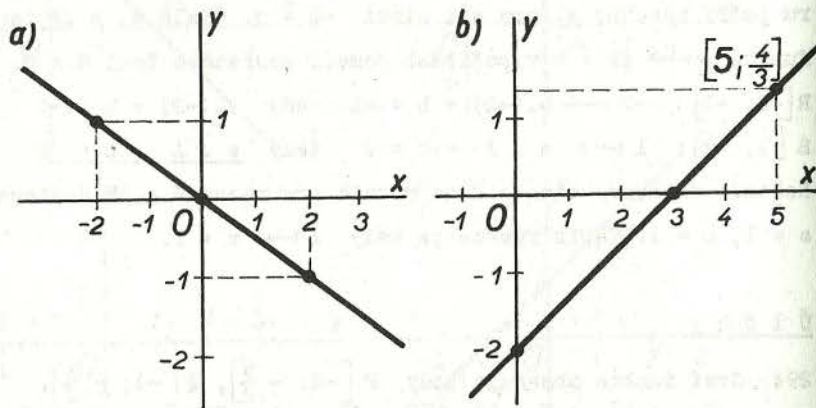
[a) $x \mapsto -x + 3$; b) $x \mapsto 2x - 4$

296 Graf lineární funkce $x \mapsto ax + b$ s definičním oborem $D = R$ obsahuje body a) $M[-2; 0]$, $N[3; -2]$; b) $P[-1; 2]$,

Q [4; 2]. Určete v obou případech čísla a , b v zápisu funkce.

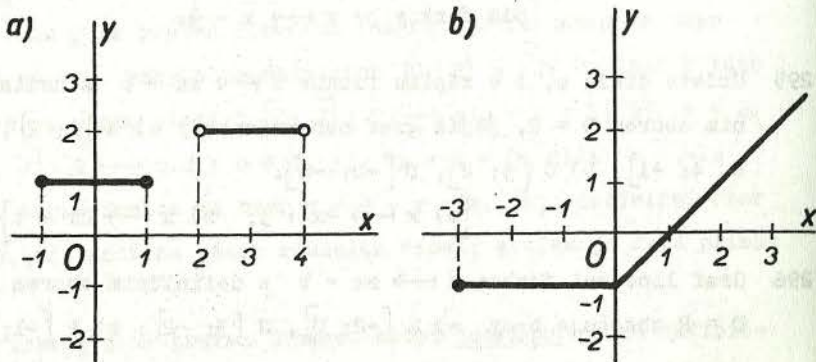
[a) $x \mapsto -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$; b) $x \mapsto 2$]

297 Na obrázku a) a b) jsou grafy funkcí s definičním oborem $D = \mathbb{R}$. Stanovte zápisy těchto funkcí.



[a) $x \mapsto -\frac{1}{2}x$; $x \mapsto \frac{2}{3}x - 2$]

298 Na obrázcích a), b) jsou grafy funkcí. Určete jejich definiční obory a zápisy.



a) Pro $-1 \leq x \leq 1$ je zápis funkce $x \mapsto 1$, pro $2 < x < 4$ je $x \mapsto 2$. b) Pro $-3 \leq x \leq 0$ je zápis funkce $x \mapsto -1$, pro $0 \leq x$ je $x \mapsto x - 1$.

PŘÍKLAD 27

Zjistěte, která z funkcí a) $x \mapsto \frac{2}{3}x - 2$; b) $x \mapsto -6x + 8$; c) $x \mapsto -3$ je klesající a která rostoucí.

Řešení

Podle definice rostoucí funkce (pro každá dvě různá čísla $x_1 < x_2$ definičního oboru je $f(x_1) < f(x_2)$) a klesající funkce (pro každá dvě různá $x_1 < x_2$ z D je $f(x_1) > f(x_2)$) zjistíme, o jaký druh funkce jde.

a) Protože jde o funkci lineární, je jejím definičním oborem D množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ a grafem přímky. Stačí tedy vyšetřovat souřadnice jen dvou různých bodů grafu $[x; f(x)]$. Zvolíme např. $x_1 = -3$, $x_2 = 6$ a dostaneme tabulku:

x	-3	6
$\frac{2}{3}x - 2$	-4	2

Pro $-3 < 6$ je $f(-3) = -4$, $f(6) = 2$; $f(-3) < f(6)$; jde tedy o funkci rostoucí.

Poznámka: Funkce $x \mapsto ax + b$ je pro $a > 0$, tj. v našem případě pro $a = \frac{2}{3} > 0$, vždy rostoucí.

b) Zvolíme $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Pak platí tabulka:

x	0	3
$-6x + 8$	8	-10

Pro $0 < 3$ je $f(0) = 8$, $f(3) = -10$; $f(0) > f(3)$; jde tedy o funkci klesající.

Poznámka: Funkce $x \mapsto ax + b$ je pro $a < 0$, tj. v našem případě pro $a = -6 < 0$, vždy klesající.

c) Pro libovolná dvě různá x_1, x_2 je $f(x_1) = f(x_2) = -3$, což je konstanta; v tomto případě jde o funkci nazývanou konstantní (stálá), která není ani rostoucí, ani klesající.

Ú l o h y

299 Rozhodněte, která z lineárních funkcí a) $x \mapsto -3x - 2$; b) $x \mapsto 5$; c) $x \mapsto \frac{4}{3}x - 1$ je rostoucí nebo klesající nebo konstantní nejprve početně a pak si výsledek ověřte na grafu.

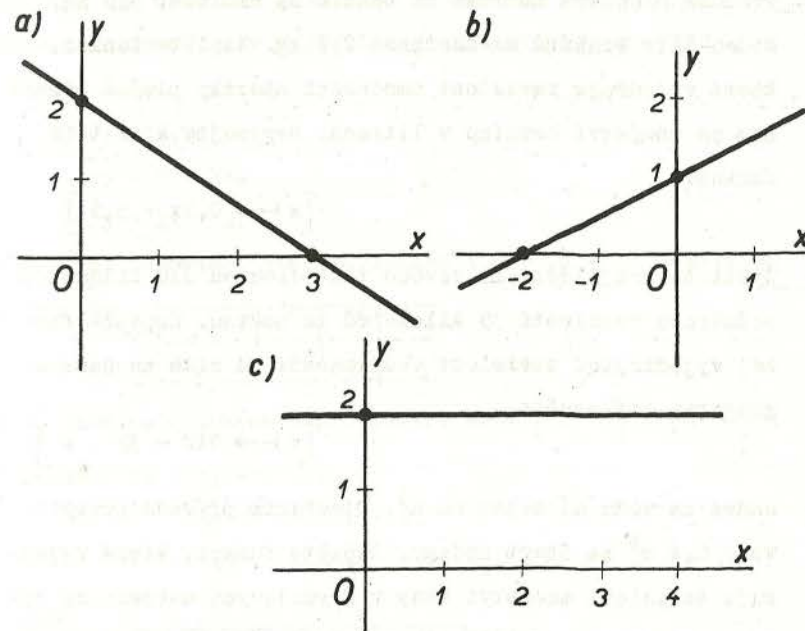
[a) funkce klesající; b) konstantní; c) rostoucí]

300 Dvě funkce jsou určeny zápisy $x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$ a $x \mapsto -\frac{1}{2}x - 1$.

a) Zjistěte, o který druh funkcí jde (rostoucí nebo klesající). b) Sestrojte jejich grafy a popište vzájemnou polohu.

[a) Obě funkce jsou klesající; b) grafy jsou rovnoběžné přímky.]

301 Na obrázcích a), b), c) jsou grafy funkcí. Určete jejich zápisy. Zjistěte, zda jde o funkce rostoucí nebo klesající.



[a) $x \mapsto -\frac{2}{3}x + 2$, funkce klesající
 b) $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$, funkce rostoucí
 c) $x \mapsto 2$, funkce konstantní]

302 Rychlík jede průměrnou rychlostí 72 km za hodinu z místa A do místa B.

a) Sestrojte graf závislosti ujeté dráhy na čase a sestavte zápis této závislosti. Dále určete, o jaký druh funkce jde. b) Jaká je vzdálenost míst A, B, jestliže do místa B dojel rychlík za 1 hodinu 25 minut? (Volte jednotky na osách: 1 hodina odpovídá 6 cm, 2 km odpovídá 1 mm.)

[a) $x \mapsto 72x$, funkce rostoucí; b) 102 km]

- 303 Prázdná plechová nádržka na benzín má hmotnost 3,5 kg. Jeden litr benzínu má hmotnost 0,7 kg. Zapište funkci, která vyjadřuje závislost hmotnosti nádržky plněné benzinem na množství benzínu v litrech. Narýsujte graf této funkce.

$$[x \mapsto 0,7x + 3,5]$$

- 304 Cyklista projížděl při závodě trať dlouhou 210 kilometrů průměrnou rychlostí 35 kilometrů za hodinu. Zapište funkci vyjadřující závislost vzdálenosti od cíle na čase a graficky znázorněte.

$$[x \mapsto 210 - 35 \cdot x]$$

- 305 Nádrž na vodu má objem 80 m³. Otevřením přívodu přibývá vody 0,4 m³ za čtvrt hodiny. Zapište funkci, která vyjadřuje závislost množství vody v krychlových metrech na čase v hodinách, jestliže při otevření přítoku nádrž a) byla prázdná, b) byla již naplněna 300 hektolitry vody.

$$[a) x \mapsto 1,6x; b) x \mapsto 1,6x + 30]$$

- 306 Letadlo startovalo se zásobou 2 000 litrů benzínu. Na 100 kilometrů letu spotřebovalo osminu tohoto množství. Zapište funkci, která vyjadřuje zásobu paliva v závislosti na urežené dráze, a graficky ji znázorněte. Jaká je nejdelší možná délka letu?

$$[x \mapsto 2\,000 - 2,5x; 800 \text{ km}]$$

PŘÍKLAD 28

Řešte graficky soustavu rovnic:

$$2x - y = 2$$

$$2x + 3y - 6 = 0$$

Řešení

Nejprve z každé rovnice vyjádříme y , tj. uvedeme na tvar $y = f(x)$:

$$a) \quad 2x - y = 2,$$

$$-y = 2 - 2x,$$

$$y = 2x - 2.$$

Této rovnici odpovídá lineární funkce $x \mapsto 2x - 2$. Sestavíme její tabulku

x	0	1	2
2x - 2	-2	0	2

atd.

Graf g_1 (obr. a) určíme např. pomocí bodů $[0, -2]$ a $[1, 0]$.

$$b) \text{ Obdobně: } 2x + 3y - 6 = 0,$$

$$3y = -2x + 6,$$

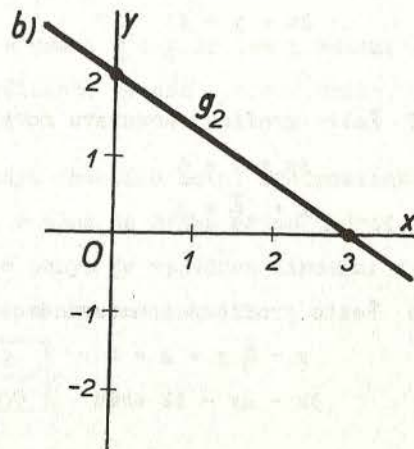
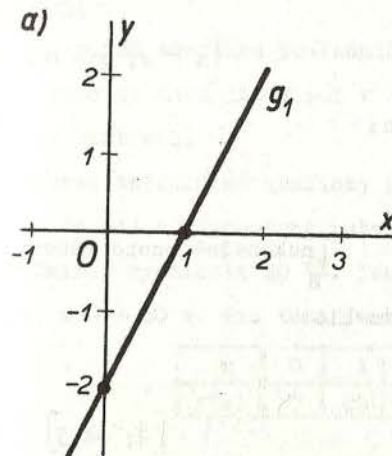
$$y = -\frac{2}{3}x + 2, \text{ tj. } x \mapsto -\frac{2}{3}x + 2$$

Tabulka:

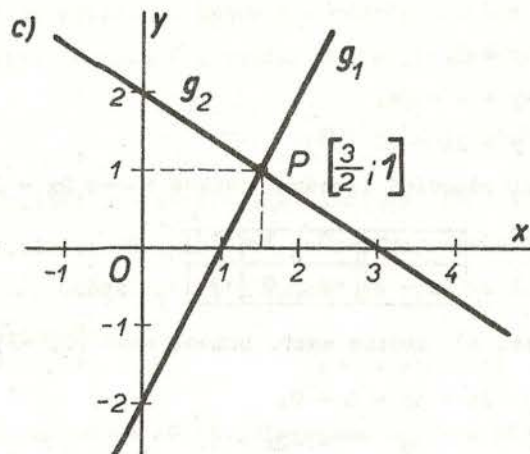
x	0	1	2	3
$-\frac{2}{3}x + 2$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

atd.

Graf g_2 (obr. b) určíme např. pomocí bodů $[0, 2]$ a $[3, 0]$.



Na obr. c) jsou naryšovány oba grafy g_1 a g_2 . Souřadnice x , y jejich průsečíku jsou řešením dané soustavy rovnic.



Z obr. c) vyčteme $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$.

Úlohy

307 Řešte graficky soustavu rovnic:

$$x - y = 2$$

$$2x + y = 4$$

$$[x = 2, y = 0]$$

308 Řešte graficky soustavu rovnic:

$$3x + y = 6$$

$$x + \frac{y}{3} = 2$$

[nekonečně mnoho řešení]

309 Řešte graficky soustavu dvou rovnic:

$$x + \frac{2}{3}y + 2 = 0$$

$$3x - 2y - 12 = 0$$

$$[1; -4,5]$$

310 Řešte graficky soustavu dvou rovnic:

$$2x - 4y = 8$$

$$-x + 2y = 4$$

[nemá řešení]

311 Řešte graficky soustavu dvou rovnic:

$$x + 2y = 4$$

$$-4x + y = 8$$

$$[-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}]$$

PŘÍKLAD 29

Nákladní auto vyjelo po dálnici v 8 hodin ráno z města M směrem do města N. Jelo průměrnou rychlostí 50 kilometrů za hodinu. V 9 hodin 30 minut za ním vyjelo také z města M osobní auto průměrnou rychlostí 80 kilometrů za hodinu. a) Kdy a v jaké vzdálenosti od města M dostihne osobní auto nákladní auto? b) Zjistěte, zda to bude před nebo za městem N, které je od města M vzdáleno 150 kilometrů. Proveďte grafické řešení úlohy.

Řešení

a) Zvolíme soustavu souřadnic s osami x a y . Na ose x budeme vyznačovat dobu jízdy aut v hodinách, na ose y ujeté dráhy v kilometrech.

Nejprve znázorníme graficky pohyb osobního auta. Předpokládáme, že jde o rovnoměrný pohyb, v němž je dráha přímo úměrná průměrné rychlosti $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tento pohyb je vyjádřen lineární funkcí $x \mapsto 80x$. Pro tuto funkci sestavíme tabulku:

x	0	1	2
$f(x)$	0	80	160

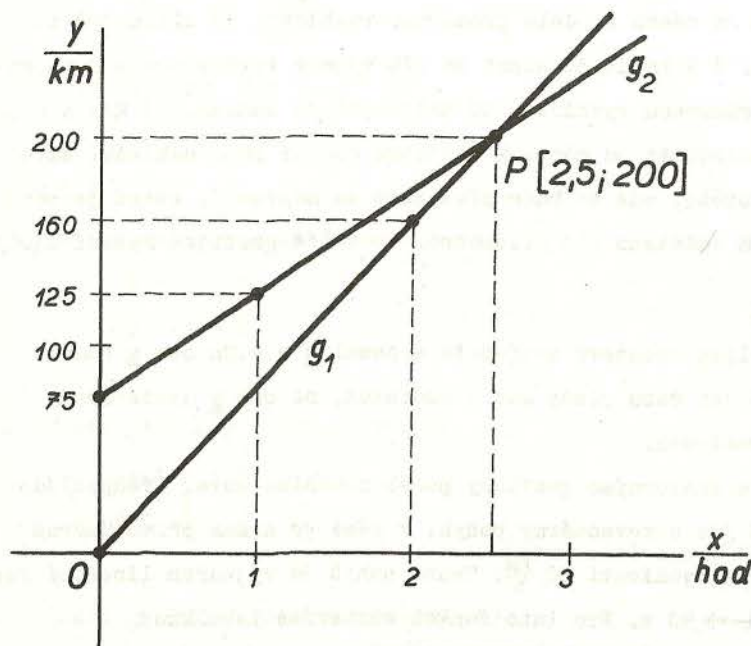
atd.

Z ní vybereme souřadnice dvou bodů, např. $[0; 0]$ a $[2; 160]$, pro sestrojení grafu g_1 (obr.).

Pohyb nákladního auta zaznamenáme až od doby výjezdu osobního auta, tj. od 9 hodin 30 minut. V tomto okamžiku má již nákladní auto ujeto 75 kilometrů (tj. $50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5 \text{ h}$). Za další hodinu ujede nákladní auto opět 50 km, tj. urazí již $75 \text{ km} + 50 \text{ km}$ atd. Opět sestavíme tabulku

x	0	1	2	
f(x)	75	$75+50 \cdot 1$	$75+50 \cdot 2$	std.

Tato tabulka patří funkci $x \mapsto 50x + 75$. Její graf g_2 sestrojíme např. pomocí bodů $[0, 75]$ a $[1, 125]$ (obr.).



Grafy g_1 a g_2 se protnou v bodě P, který má souřadnice $[2,5; 200]$. Tak získáme odpověď: a) Osobní auto dostihne nákladní

auto za 2,5 hodiny po svém odjezdu, tj. ve 12 hodin, a to ve vzdálenosti 200 kilometrů od města M. b) Ze souřadnice $y = 200$ bodu P je zřejmé, že místo setkání je až za městem N vzdáleným jen 150 kilometrů od města M.

Ú l o h y

312 a) Při větším odběru zemního plynu platí spotřebitel měsíční paušál 37,50 Kčs a jen 70 haléřů za 1 m^3 spotřebovaného plynu. Zapište lineární funkci, která vyjadřuje závislost celkové platby v závislosti na spotřebě, a graficky ji znázorněte.

a) Zapište funkci a graficky ji znázorněte i v případě, že cena za 1 m^3 je 1,05 Kčs a platí se měsíční nájemné za plynoměr 7,50 Kčs.

c) Udejte počet m^3 spotřebovaného plynu, pro který je sazba a) výhodnější.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } x \mapsto 0,70x + 37,50; \text{ b) } x \mapsto 1,05x + 7,50; \\ \text{c) pro více než } 86 \text{ m}^3 \end{array} \right]$$