

- 865 Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky strany  $c = 6$  cm, výšky na stranu AB, tj.  $v_c = 4,5$  cm, a poloměr  $r = 4$  cm opsané kružnice. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má 2 řešení]

- 866 Sestrojte trojúhelník MNP, je-li poloměr kružnice opsané  $r = 4,5$  cm, délka strany  $d(MN) = 7$  cm a strana NP je od středu opsané kružnice vzdálena 1,5 cm. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má v celé rovině 2 řešení]

- 867 Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky strany  $c = 7$  cm, výšky  $v_b = 6,5$  cm a výšky  $v_c = 5$  cm. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má 2 řešení (ostroúhlý a tupouhlý trojúhelník)]

- 868 Sestrojte trojúhelník MNP, jsou-li dány délky strany  $m = 58$  mm, výšky  $v_m = 42$  mm a výšky  $v_n = 50$  mm. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má 2 řešení (ostroúhlý a tupouhlý trojúhelník)]

- 869 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li  $d(AC) = b = 5$  cm a průsečík V výšek je od vrcholu A vzdálen 6 cm a od vrcholu C 1,5 cm. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má dvě řešení - dva tupouhlé trojúhelníky souměrně sdružené podle přímky AC]

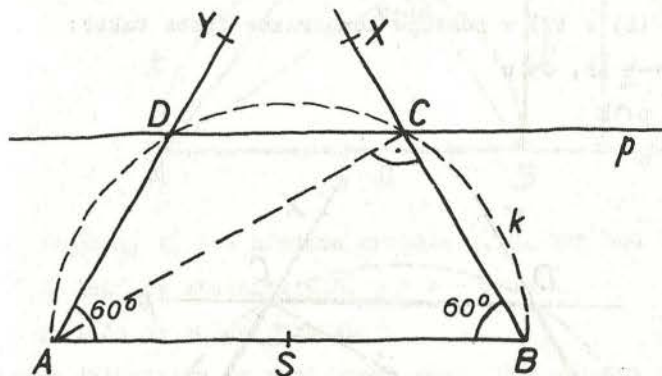
## PŘÍKLAD 76

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník ABCD se základnou AB délky  $a = 10$  cm a úhlem DAB velikosti  $60^\circ$ , jestliže úhlopříčka AC svírá s ramenem BC pravý úhel. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, lichoběžník sestrojte a určete počet řešení úlohy.

Řešení

Rozbor

Předpokládáme, že načrtnutý lichoběžník je řešením úlohy.



Protože lichoběžník ABCD je rovnoramenný, jsou úhly ABC a DAB shodné.

Neznáme body C a D. Pro neznámý bod C platí:

1. leží na Thaletově kružnici  $k$  s průměrem AB,
2. leží na ramenu BX úhlu ABX velikosti  $60^\circ$ .

Pro neznámý bod D platí:

1. leží na kružnici  $k$  (protože i úhel ADB je pravý),
2. leží na ramenu AY úhlu BAY velikosti  $60^\circ$ ,

(popř. 2'. leží na přímce  $P \parallel AB$  a procházející bodem C).

### Postup konstrukce

- (1)  $AB$ ;  $d(AB) = 10$  cm
- (2)  $S$ ;  $AS \cong SB$ ,  $S \in AB$
- (3)  $k$ ;  $k(S; r = 5$  cm)
- (4)  $\sphericalangle ABX$ ;  $v(\sphericalangle ABX) = 60^\circ$
- (5)  $C$ ;  $C \in \rightarrow BX \cap k$
- (6)  $\sphericalangle BAY$ ;  $v(\sphericalangle BAY) = 60^\circ$
- (7)  $D$ ;  $D \in \rightarrow AY \cap k$
- (8) lichoběžník  $ABCD$

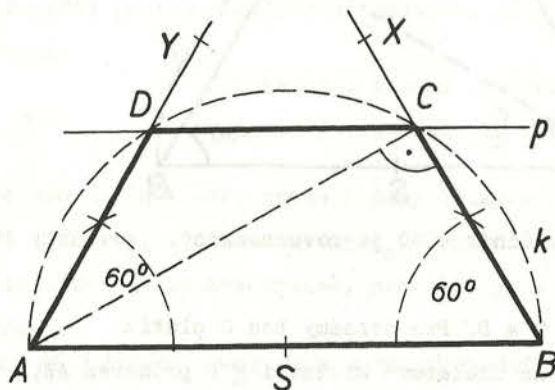
Poznámka: Kdybychom použili podmínku 2' pro bod  $D$ , nahradili

bychom kroky (6) a (7) v postupu konstrukce třeba takto:

(6')  $p$ ;  $p \parallel \leftrightarrow AB$ ,  $C \in p$

(7')  $D$ ;  $D \in p \cap k$

### Konstrukce



Úloha má jediné řešení ve zvolené polorovině.

### PŘÍKLAD 77

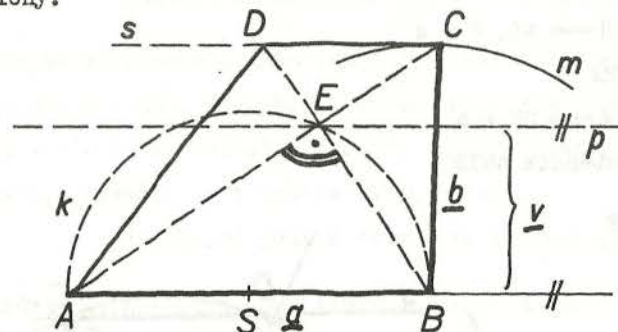
Sestrojte lichoběžník  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), jehož úhlopříčky svírají pravý úhel. Základna  $AB$  má délku  $a = 8$  cm, strana  $BC$

má délku  $b = 5$  cm a průsečík úhlopříček  $E$  je od strany  $AB$  vzdálen  $v = 3$  cm. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

### Řešení

#### Rozbor

Předpokládejme, že lichoběžník  $ABCD$  znázorněný na obrázku je řešením úlohy.



Známe vrcholy  $A$ ,  $B$  a hledáme vrcholy  $C$ ,  $D$ . Pro bod  $C$  platí:

1. leží na kružnici  $m(B; r = b = 5$  cm)
2. leží na polopřímce  $AE$

Protože úhlopříčky svírají pravý úhel, pro pomocný neznámý bod  $E$  platí:

1. leží na Thaletově kružnici s průměrem  $AB$ ,
2. leží na přímce  $p \parallel \leftrightarrow AB$  ve vzdálenosti  $v = 3$  cm (obojí ve zvolené polorovině s hranicí  $AB$ ).

Pro vrchol  $D$  platí:

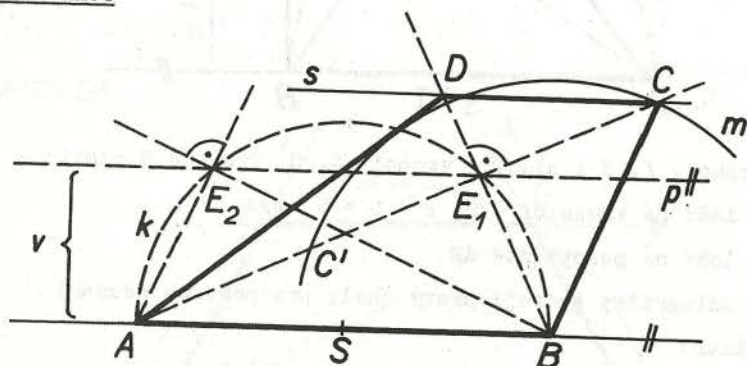
1. leží na polopřímce  $BE$
2. leží na přímce  $s \parallel \leftrightarrow AB$  a procházející bodem  $C$

### Postup konstrukce

- (1)  $AB$ ;  $d(AB) = 8$  cm

- (2)  $S$ ;  $AS \cong SB$ ,  $S \in AB$
- (3)  $p$ ;  $p \parallel \leftrightarrow AB$ ,  $v(p, \leftrightarrow AB) = 3 \text{ cm}$  (ve zvolené polorovině)
- (4)  $k$ ;  $k(S$ ;  $r = \frac{1}{2}d(AB) = 4 \text{ cm}$ )
- (5)  $E$ ;  $E \in p \cap k$
- (6)  $m$ ;  $m(B$ ;  $r = 5 \text{ cm}$ )
- (7)  $\mapsto AE$
- (8)  $C$ ;  $C \in \mapsto AE \cap m$
- (9)  $s$ ;  $s \parallel \leftrightarrow AB$ ,  $C \in s$
- (10)  $\mapsto BE$
- (11)  $D$ ;  $D \in \mapsto BE \cap s$
- (12) lichoběžník ABCD

# Konstrukce



Úloha má jediné řešení, které získáme pomocí bodu  $E_1$ . Bod  $E_2$  splňuje sice obě požadované vlastnosti (je vzdálen 3 cm od základny AB a je vrcholem pravého úhlu  $\angle AE_2B$ ), avšak přímka  $AE_2$  neprotne kružnici  $m$ . Rovněž druhý průsečík  $C'$  přímky  $AE_1$  s kružnicí  $m$  nevede k řešení úlohy, neboť by pak průsečík  $E_1$  úhlopříček lichoběžníku ležel vně tohoto konvexního útvaru.

# Úlohy

070 Sestrojte lichoběžník ABCD ( $AB \parallel CD$ ), který má stranu AB délky  $a = 10 \text{ cm}$ , úhlopříčku BD délky  $f = 8,5 \text{ cm}$  a rameno BC délky  $b = 7 \text{ cm}$ . Úhlopříčka BD je kolmá k ramenu AD. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má dvě řešení ve zvolené polorovině]

071 Sestrojte lichoběžník ABCD ( $AB \parallel CD$ ), je-li  $d(AB) = a = 6,8 \text{ cm}$ ,  $\angle = 60^\circ$ , úhlopříčka BD má délku  $f = 7 \text{ cm}$  a  $d(CD) = c = 3 \text{ cm}$ . Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má jediné řešení ve zvolené polorovině]

072 Sestrojte lichoběžník ABCD ( $AB \parallel CD$ ), je-li  $d(AB) = 8 \text{ cm}$ ,  $d(CD) = 3 \text{ cm}$ , výška  $v = 3,5 \text{ cm}$  a úhlopříčka AC svírá se stranou AB úhel velikosti  $30^\circ$ . Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má ve zvolené polorovině jediné řešení]

073 Sestrojte lichoběžník se základnami AB a CD, znáte-li délku strany  $d(AB) = 8,5 \text{ cm}$ , strany  $d(CD) = 3,5 \text{ cm}$ , výšky  $v = 3,5 \text{ cm}$ , úhlu  $v(\angle ABC) = 60^\circ$ . Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má ve zvolené polorovině jediné řešení]

074 Sestrojte pravoúhlý lichoběžník ABCD ( $AB \parallel CD$ ) s pravým úhlem při vrcholu A, pro jehož strany platí  $d(AB) = 6 \text{ cm}$ ,  $d(BC) = 5 \text{ cm}$  a  $d(AD) = 4,5 \text{ cm}$ . a) Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

b) Pro jakou délku strany BC bude mít úloha jediné řešení a jaký to bude čtyřúhelník?

[Úloha má ve zvolené polorovině dvě řešení. Pro  $d(BC) = 4,5$  cm dostaneme jediné řešení - obdélník.]

875 V lichoběžníku ABCD ( $AB \parallel CD$ ) platí:  $d(AB) = 8$  cm,  $d(AD) = 4$  cm,  $\angle DAB = 60^\circ$ . Sestrojte tento lichoběžník, je-li dále dáno a)  $d(BC) = 3$  cm; b)  $d(BC) = 3,7$  cm. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

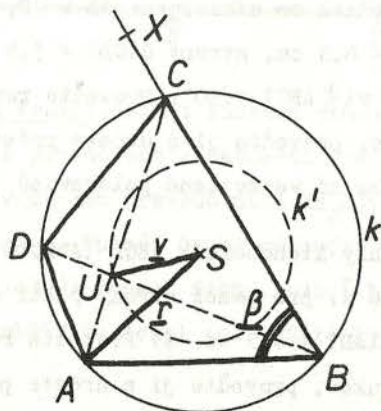
[Úloha má ve zvolené polorovině a) 0; b) 2 řešení]

## PŘÍKLAD 78

Sestrojte obecný čtyřúhelník ABCD vepsaný do kružnice  $k(S; r = 4$  cm) o straně délky  $d(AB) = 6$  cm a s úhlem velikosti  $\beta = 60^\circ$ . Průsečík úhlopříček U má od středu kružnice  $k$  vzdálenost  $v = 2,5$  cm. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

Řešení

Rozbor

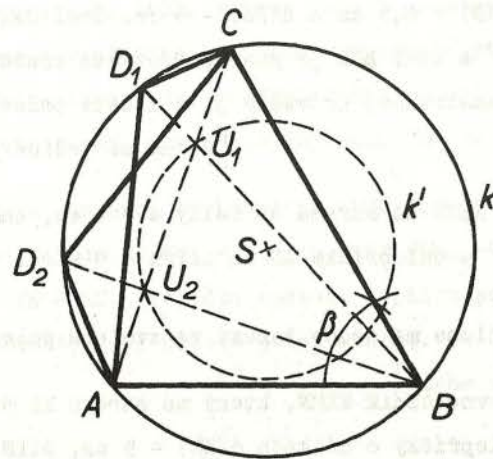


Předpokládejme, že čtyřúhelník znázorněný na obrázku je řešením úlohy. Jeho vrcholy leží tedy na kružnici  $k(S; r = 4$  cm). Strana AB má délku 6 cm a úhel ABC velikosti  $\beta = 60^\circ$ . Známe tedy vrcholy A, B a jako další získáme bod C na polopřímce BX, která je druhým ramenem úhlu velikosti  $\beta$ . Bod U jako průsečík úhlopříček AC a BD má od bodu S vzdálenost  $v = 2,5$  cm, a leží tedy na kružnici  $k'(S; v = 2,5$  cm) a uvnitř úsečky AC.

### Postup konstrukce

- (1) AB;  $d(AB) = 6$  cm
- (2)  $k; k(S; 4$  cm) ve zvolené polorovině ( $AS \approx BS$ )
- (3)  $\angle ABX$ ;  $\angle ABX = \beta = 60^\circ$
- (4) C;  $C \in k \cap \rightarrow BX$
- (5)  $k'; k'(S; 2,5$  cm)
- (6) U;  $U \in \rightarrow AC \cap k'$
- (7) D;  $D \in \rightarrow BU \cap k$
- (8) čtyřúhelník ABCD

### Konstrukce



Protože  $d(AB) < 2r$ , je po konstrukci úsečky AB střed  $S$  kružnice  $k$  ve zvolené polorovině sestrojitelný jednoznačně. Po konstrukci úhlu  $\beta$  velikosti  $60^\circ$  v této polorovině dostaneme jediný bod  $C$  na kružnici  $k$ . V našem případě však existují dva různé průsečíky úsečky  $AC$  s kružnicí  $k'$  uvnitř úhlu  $ABC$ , tj. body  $U_1, U_2$ . Tyto body vedou k dvěma různým řešením úlohy, tj. ke čtyřúhelníkům  $ABCD_1$  a  $ABCD_2$ . Úloha má tedy v polorovině  $ABS$  dvě řešení.

### Ú l o h y

876 Sestrojte obecný čtyřúhelník  $ABCD$ , jehož úhlopříčky se protínají a jsou na sebe kolmé. Platí  $d(AC) = 9$  cm,  $d(BD) = 6$  cm,  $d(AD) = 4$  cm a  $d(CD) = 6,5$  cm. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má jediné řešení]

877 Sestrojte čtyřúhelník  $ABCD$ , jehož strany mají délky  $d(AB) = 10$  cm,  $d(CD) = 6,5$  cm a  $d(DA) = 6$  cm. Úhel  $DAB$  má velikost  $\angle = 60^\circ$  a úhel  $BCD$  je pravý. Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má jediné řešení]

878 Rovnoběžník  $ABCD$  má stranu  $AB$  délky  $a = 6$  cm, úhel  $\angle$  má velikost  $75^\circ$  a úhlopříčka  $AC$  má délku  $e = 9$  cm. Sestrojte ho.

[úloha má jedno řešení ve zvolené polorovině]

879 Sestrojte rovnoběžník  $KLMN$ , který má stranu  $KL$  délky  $5,5$  cm a úhlopříčky o délkách  $d(KM) = 9$  cm,  $d(LN) = 6$  cm.

[úloha má jediné řešení ve zvolené polorovině]

880 V rovnoběžníku  $ABCD$  je velikost úhlu  $ASB$  rovna  $120^\circ$ , kde bod  $S$  je průsečík úhlopříček. Strana  $AB$  má délku  $a = 5,5$  cm a úhlopříčka  $AC$  délku  $e = 8$  cm. Sestrojte ho.

[úloha má jediné řešení ve zvolené polorovině]

881 Sestrojte kosočtverec  $MNOP$ , který má stranu  $MN$  délky  $5,8$  cm a úhlopříčku  $NP$  délky  $7$  cm.

[úloha má jediné řešení ve zvolené polorovině]

882 Rovnoběžník  $ABCD$  má stranu  $AD$  délky  $5$  cm a úhel  $ABC$  velikosti  $110^\circ$ . Sestrojte ho, platí-li pro délku úhlopříčky  $AC$  a)  $e = 8,5$  cm; b)  $e = 5$  cm; c)  $e = 4,2$  cm.

[úloha má a) jediné řešení ve zvolené polorovině; b) a c) řešení neexistuje]

883 a) Sestrojte rovnoběžník  $ABCD$ , je-li  $d(AB) = 8,8$  cm,  $d(BC) = 5,3$  cm a výška na stranu  $AB$  má délku  $v_a = 4,5$  cm. b) Potom vrcholem  $C$  veďte přímku  $p$ , která protíná stranu  $AB$  v bodě  $T$  tak, že trojúhelník  $TBC$  tvoří čtvrtinu obsahu rovnoběžníku  $ABCD$ . Polohu bodu  $T$  na straně  $AB$  určete výpočtem a vypočtete též obsah trojúhelníku  $TBC$ .

[a) existují dva rovnoběžníky; b) bod  $T$  je středem strany  $AB$ ; obsah trojúhelníku  $TBC$  je  $9,9$  cm<sup>2</sup>]

884 Sestrojte konvexní čtyřúhelník  $KLMN$ , pro který platí:  $d(KL) = 7,5$  cm,  $d(KM) = 5,5$  cm,  $v(\angle KLM) = 45^\circ$ ,  $v(\angle NKL) = 75^\circ$ ,  $KN \cong MN$ . Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má dvě řešení]