

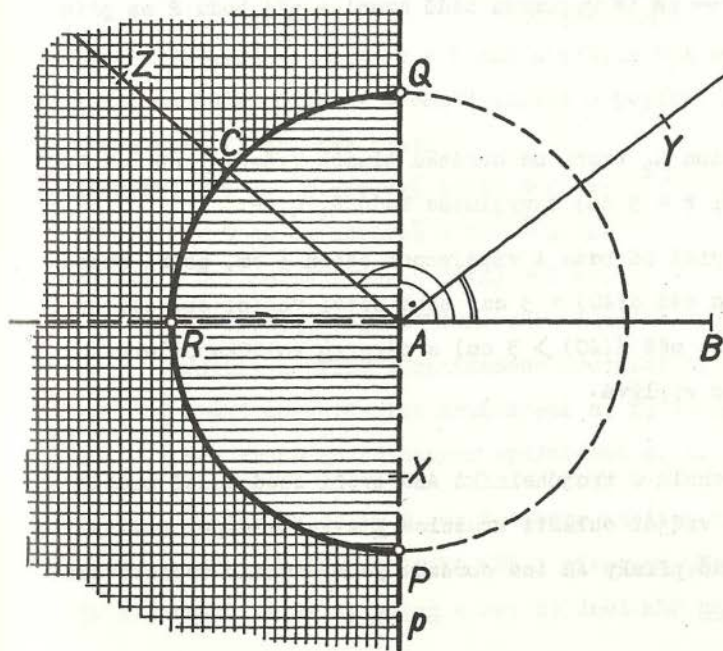
XII. MNOŽINY VŠECH BODŮ DANÉ VLASTNOSTI. KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

PŘÍKLAD 73

V trojúhelníku ABC je dána strana AB velikosti $c = 4$ cm. Vyšetřte množinu vrcholů C tohoto trojúhelníku a) s tupým úhlem CAB (tj. množinu M_1); b) s tupým úhlem CAB a zároveň se stranou AC délky $b = 3$ cm (množinu M_2); c) s tupým úhlem CAB a (zároveň) se stranou AC délky aspoň 3 cm (množinu M_3).

Řešení

a) Sestrojíme přímku $p \perp \leftrightarrow AB$ bodem A (obr.). Přímka p rozděluje rovinu na dvě pol roviny. Pro body $X \neq A$ přímky p platí



$\angle XAB = 90^\circ$, a proto body X do hledané množiny nepatří. Také všechny body Y vnitřku poloroviny p_B do hledané množiny nepatří, neboť úhly YAB jsou částí např. pravého úhlu QAB . Každý bod Z vnitřku poloroviny opačné k polorovině p_B určuje tupý úhel ZAB (větší než pravý úhel QAB), avšak bod Z neleží na přímce AB .

Odpověď

Hledanou množinu M_1 tvoří body vnitřku poloroviny opačné k polorovině p_B (tj. $\leftarrow p_B$ s výjimkou bodů hranice p a bodů přímky AB). Množina M_1 je na obrázku vyšrafována vodorovně.

b) Body C dané roviny, pro něž platí $d(AC) = 3$ cm, vytvoří kružnici $k(A; r = 3$ cm). Do hledané množiny M_2 patří jen body průniku kružnice k s vnitřkem poloroviny $\leftarrow p_B$; platí tedy $M_2 = k \cap \leftarrow p_B$ (s výjimkou bodů hranice p a bodu R na přímce AB).

Odpověď

Hledanou množinu M_2 tvoří na obrázku tlustě vytažený oblouk PQ kružnice $k(A; r = 3$ cm) s výjimkou bodů P, Q, R .

c) Body C , mající od bodu A vzdálenost aspoň 3 cm, patří množině M_2 (tj. pro něž $d(AC) = 3$ cm) nebo patří vnější oblasti kružnice k (tj. pro něž $d(AC) > 3$ cm) a zároveň vnitřku poloroviny $\leftarrow p_B$. Z toho vyplývá

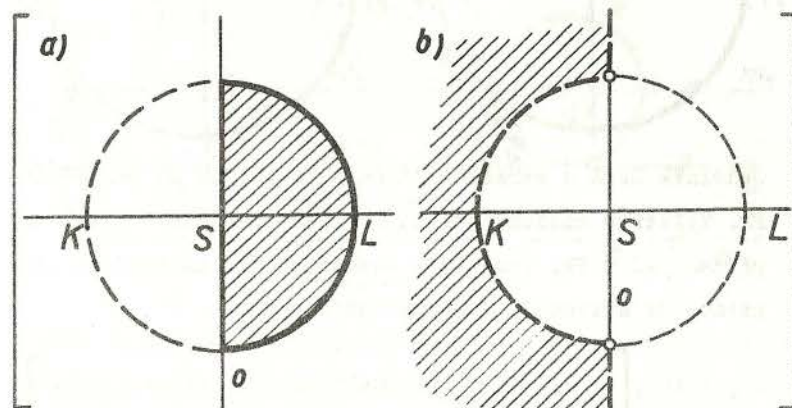
odpověď:

Množinu M_3 vrcholů C trojúhelníků ABC tvoří sjednocení množiny M_2 s průnikem vnější oblasti kružnice k a vnitřku poloroviny $\leftarrow p_B$ bez bodů přímky AB (na obrázku je M_3 svisle vyšrafována).

Úlohy

848 Úsečka KL má délku 6 cm, střed S a osu souměrnosti o . Vyšetřte množinu všech bodů X , pro něž platí

- $d(SX) \leq d\left(\frac{KL}{2}\right)$ a zároveň $d(KX) \geq d(LX)$;
- $d(SX) > d\left(\frac{KL}{2}\right)$ a zároveň $d(KX) < d(LX)$.

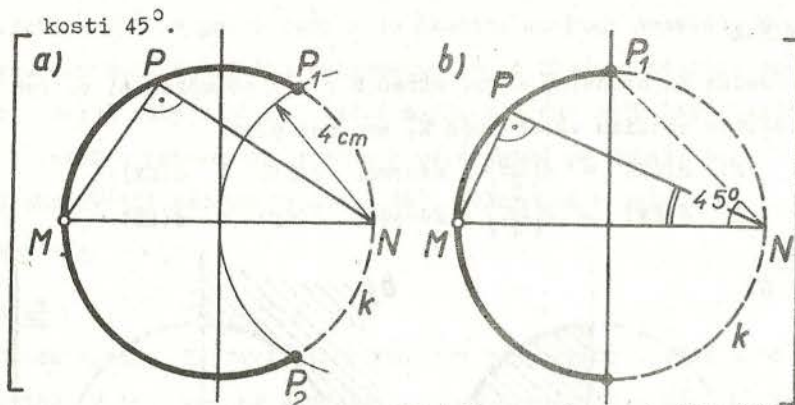


849 Sestrojte kružnice $m(M; r = 5$ cm) a $n(N; r = 6$ cm) se střednou délkou $d(MN) = 4$ cm. Vyznačte a popište množiny všech bodů X , pro něž platí

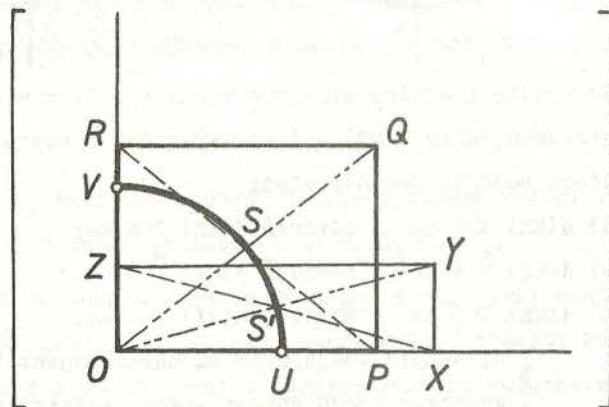
- $d(XM) < 5$ cm a zároveň $d(XN) > 6$ cm;
- $d(MX) \leq 5$ cm a zároveň $d(NX) \leq 6$ cm;
- $d(MX) > 5$ cm a zároveň $d(NX) > 6$ cm.

a) průnik vnějšku kruhu ohraničeného kružnicí n a vnitřkem kruhu ohraničeného kružnicí m ; b) průnik kruhů ohraničených kružnicemi m, n ; c) průnik vnějšků kruhů ohraničených kružnicemi m, n .

850 Je dána úsečka MN délky 8 cm. Vyšetřte množinu všech vrcholů P převrhlých trojúhelníků MNP s přeponou MN , které mají a) stranu NP délky aspoň 4 cm; b) úhel MNP nejvýš veli-



851 Obdélník OPQR o stranách délek 5 cm a 4 cm má úhlopříčku PR. Vyšetřte množinu středů S všech obdélníků OXYZ s úhlopříčkou XZ $\cong$ PR. Vrcholy X těchto obdélníků leží na polopřímce OP a vrcholy Z na polopřímce OR.

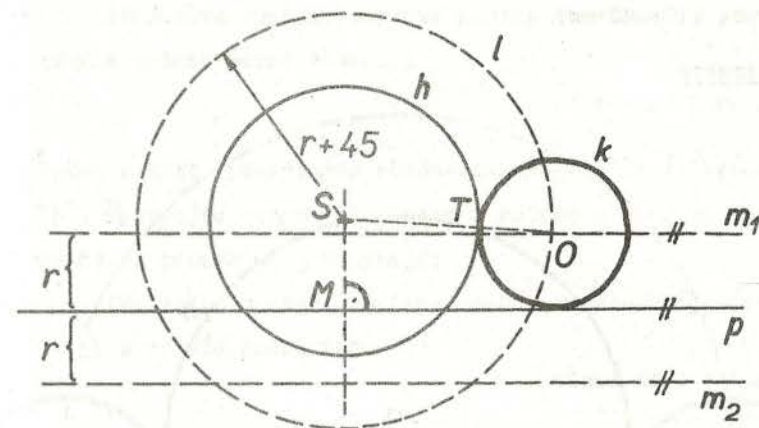


P Ř Í K L A D 74

Je dána kružnice $h(S; r = 45 \text{ mm})$ a přímka ve vzdálenosti 3 cm od bodu S . Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r = 20 \text{ mm}$, které se dotýkají přímky p a s kružnicí k mají vnější dotyk. Proveďte rozbor, zapište postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

Řešení

Rozbor (obr. a)



Na obrázku a) je znázorněno předpokládané řešení - kružnice k. Tato kružnice má požadované vlastnosti: dotýká se přímky p a kružnice h vně a má poloměr 20 mm. Podmínky pro středy O hledaných kružnic jsou tyto:

1. Množinou středů kružnic, které mají poloměr $r = 20$ mm a které se dotýkají přímky p , jsou všechny body přímek m_1 a m_2 rovnoběžných s přímkou p ve vzdálenosti 20 mm.

2. Množinou středů kružnic, které mají poloměr $r = 20$ mm a které se dotýkají kružnice h vně, je kružnice l se středem S a poloměrem $45 \text{ mm} + 20 \text{ mm}$.

Postup konstrukce

- (1) h ; $h(S; 45 \text{ mm})$
- (2) p ; $d(S, p) = 3 \text{ cm}$
- (3) m_1 ; $d(m_1, p) = 20 \text{ mm}$
- (4) m_2 ; $d(m_2, p) = 20 \text{ mm}$ (m_1 a m_2 leží v opačných polorovinách s hranicí p)

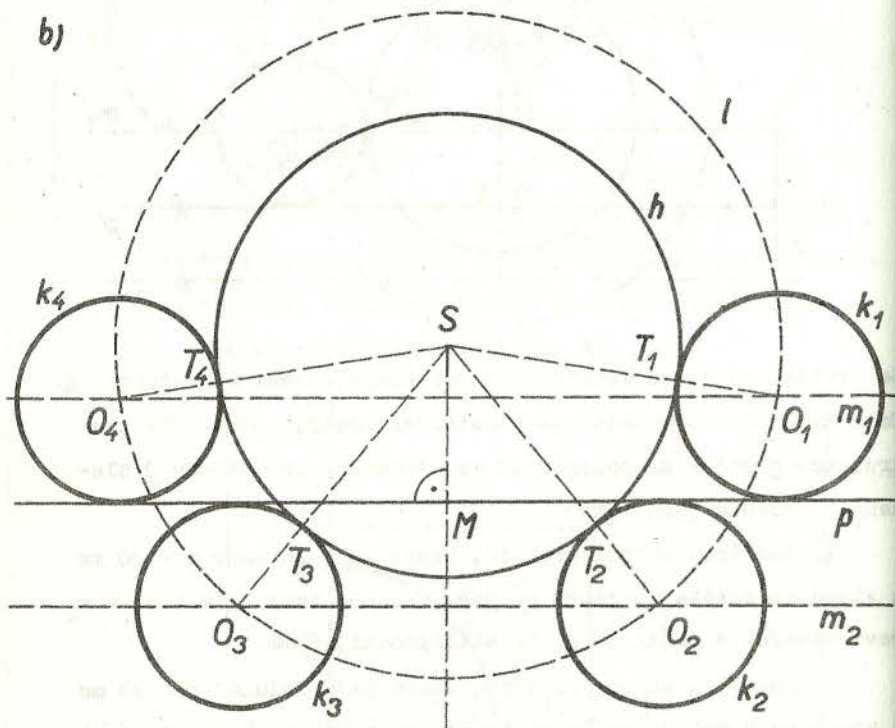
(5) ℓ ; $\ell(S; 65 \text{ mm})$

(6) O ; $O \in m_1 \cap \ell$ nebo $O \in m_2 \cap \ell$

(7) k ; $k(O; 20 \text{ mm})$

Konstrukce

b)



Úloha má 4 řešení, tj. kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 (viz obr. b), protože každá z přímek m_1, m_2 protne kružnici ℓ ve dvou bodech (platí totiž $d(S; m_1) < 6,5 \text{ cm}$, $d(S; m_2) < 6,5 \text{ cm}$).

Úlohy

852 Je dána přímka p a polopřímka b , která má počátek na přímce p a svírá s ní úhel velikosti 75° . Sestrojte všechny

kružnice s poloměrem $r = 2 \text{ cm}$, které se dotýkají přímky p i polopřímky b .

(Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.)

[úloha má 2 řešení]

853 Jeden z úhlů vytvořených různoběžkami m, n má velikost 63° . Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r = 1,5 \text{ cm}$, které se přímkou m, n dotýkají.

(Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.)

[úloha má 4 řešení]

854 Různoběžky p, q o průsečíku M svírají úhel velikosti 60° . Na jedné z polopřímek, na něž rozdělí bod M přímky q , sestrojte bod Q tak, aby platilo $d(MQ) = 3 \text{ cm}$. a) Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají obou přímek a přitom přímky q v bodě Q . b) Poloměr hledané kružnice též vypočítejte a výsledek porovnejte s výsledkem získaným konstrukcí.

[a) úloha má 2 řešení; b) $r_1 \approx 1,7 \text{ cm}$, $r_2 \approx 5,2 \text{ cm}$]

855 Je dána kružnice $h(O; \rho = 5,5 \text{ cm})$ a její sečna s , jejíž vzdálenost od středu O je $d = 1,5 \text{ cm}$. Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r = 2 \text{ cm}$, které se dotýkají sečny s a mají s kružnicí h vnitřní dotyk.

(Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce a proveďte ji. Určete počet řešení úlohy.)

[úloha má 3 řešení]

856 Sestrojte obdélník ABCD, jehož strany mají délky $d(AB) = 5$ cm, $d(BC) = 9$ cm. Bod P je středem strany BC. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek AB, AP a strany obdélníku BC.

(Proveďte rozbor, запиšte konstrukci, proveďte ji a určete počet řešení.)

[úloha má 2 řešení]

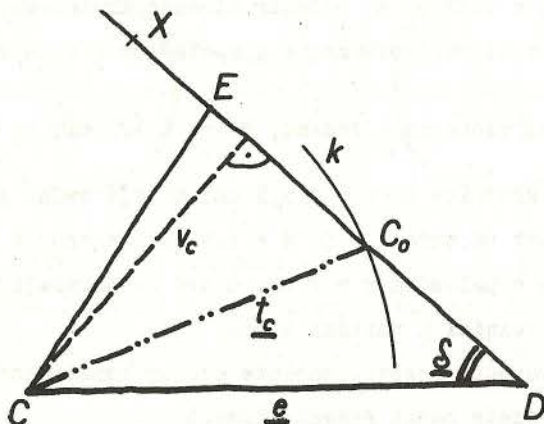
PŘÍKLAD 75

Sestrojte trojúhelník CDE, je-li dána strana CD délky $e = 8$ cm, těžnice délky $t_c = 8,5$ cm a úhel s vrcholem D velikosti $\delta = 75^\circ$. (Proveďte rozbor, запиšte postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.)

V trojúhelníku CDE sestrojte výšku v_c .

Řešení

Rozbor



Předpokládejme, že trojúhelník CDE na obrázku je řešením úlohy. Známé vrcholy C, D. Bod C_0 je středem strany DE a je ho možno

sestrotit jako průsečík kružnice $k(C, r = t_c)$ a ramena DX úhlu CDX velikosti δ . Hledáme ještě vrchol E. Pro tento neznámý bod platí:

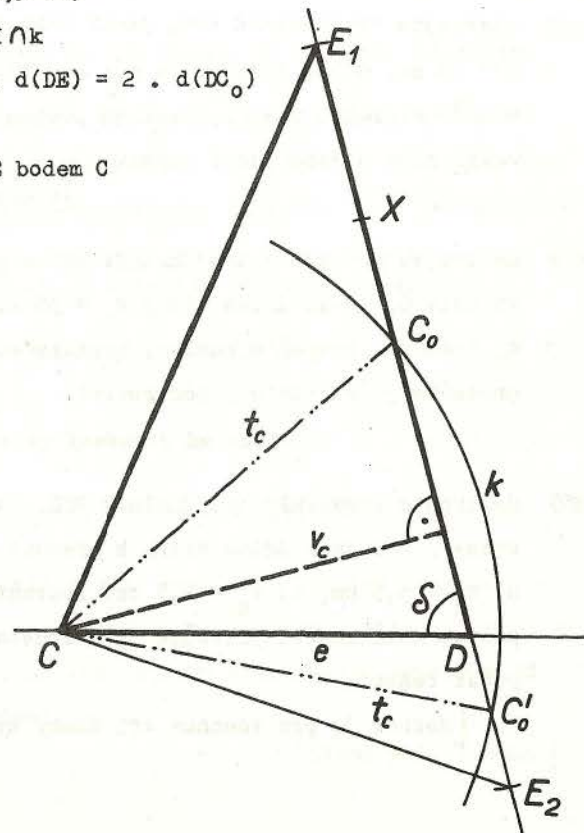
1. E leží na polopřímce DC_0
2. $DE = 2 \cdot DC_0$

Výšku v_c sestrojíme jako kolmici na přímkou DC_0 bodem C (její patu určíme přesně pomocí Thaletovy kružnice s průměrem CD).

Postup konstrukce a)

- (1) CD; $d(CD) = e = 8$ cm
- (2) $\angle CDX$; $v(\angle CDX) = \delta = 75^\circ$
- (3) k ; $k(C, t_c = 8,5$ cm)
- (4) C_0 ; $C_0 \in \rightarrow DX \cap k$
- (5) E; $E \in \rightarrow DC_0$, $d(DE) = 2 \cdot d(DC_0)$
- (6) $\triangle CDE$
- (7) v_c ; $v_c \perp \leftrightarrow DE$ bodem C

Konstrukce



Zkouška

Protože $t_c > e$, protne kružnice k přímkou DX ve dvou bodech C_0 a C'_0 , z nichž C_0 je na polopřímce DX a C'_0 na polopřímce k ní opačné. Trojúhelník CDE_1 je řešením úlohy, protože má všechny požadované vlastnosti: stranu CD délky 8 cm, těžnici t_c délky 8,5 cm a vnitřní úhel velikosti $\tilde{\alpha} = 75^\circ$. Trojúhelník CDE_2 řešením úlohy není; má sice stranu CD délky 8 cm, těžnici t_c délky 8,5 cm, avšak jeho vnitřní úhel CDE_2 má velikost $2R - \tilde{\alpha} = 105^\circ$. Úloha má tedy jediné řešení.

Úlohy

857 Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dána strana BC délky $a = 10$ cm, délka výšky $v_a = 5,5$ cm a úhel velikosti $\gamma = 60^\circ$. Proveďte rozbor, запиште postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má jediné řešení]

858 Sestrojte pravouhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , je-li délka výšky $v_c = 38$ mm, těžnice délky $t_c = 40$ mm. Proveďte rozbor, запиште postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má 2 řešení ve zvolené polorovině]

859 Sestrojte pravouhlý trojúhelník PQR , je-li dána délka odvěsny $p = 6$ cm a délka výšky k přeponě a) $v_q = 2,5$ cm; b) $v_q = 3,5$ cm; c) $v_q = 6,5$ cm. Proveďte rozbor, запиште postup konstrukce, proveďte ji a určete v každém případě počet řešení.

[Rozbor je pro všechny tři úlohy týž (i konstrukce),

a) jedno řešení, b) jedno řešení, c) žádné řešení ve zvolené polorovině.]

860 Sestrojte trojúhelník ABC , je-li $d(AB) = c = 9$ cm, $v_a = 7,5$ cm, $t_c = 6,5$ cm. Proveďte rozbor, запиште postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má jedno řešení ve zvolené polorovině; druhé řešení (tupoúhlý trojúhelník) je v opačné polorovině.]

861 Sestrojte trojúhelník ABC , má-li délku výšky $v_c = 6$ cm, těžnici délky $t_c = 6,5$ cm a úhel velikosti $\alpha = 45^\circ$. Proveďte rozbor, zapis postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má dvě řešení ve zvolené polorovině]

862 Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány délky stran $c = 8$ cm, $a = 5$ cm a délka výšky $v_c = 3,5$ cm. Proveďte rozbor, запиште postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má 2 řešení ve zvolené polorovině]

863 Sestrojte trojúhelník PQR , jsou-li dány délky strany $r = 8$ cm, těžnice $t_p = 5$ cm a výšky $v_r = 4$ cm. Proveďte rozbor, запиште postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má 2 řešení ve zvolené polorovině]

864 Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán poloměr kružnice opsané $r = 5$ cm, délka strany $c = 8,5$ cm a výšky $v_c = 63$ mm. Proveďte rozbor, запиште postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

[úloha má 2 řešení]