

Lomené výrazy (sčítání, odčítání, násobení, dělení, rozšiřování, krácení,)

Lomené výrazy jsou výrazy ve tvaru zlomku, v jehož jmenovateli je proměnná, například:

$$\frac{3}{x}, \quad \frac{x+1}{x-2}, \quad \frac{y}{2x^2 - y + 5}, \quad \frac{a^2 - ab + b^2}{a+b}, \quad -\frac{1}{3r+1}, \quad \frac{9s^2(1-s)}{12s(s-1)}$$

Počítání s lomenými výrazy má podobné vlastnosti jako počítání se zlomky. Proto si tuto souvislost budeme u jednotlivých operací připomínat.

Určování podmínek, pro něž má lomený výraz smysl

<u>Zlomky</u>	<u>Lomené výrazy</u>
Zlomek má smysl, když jeho jmenovatel je různý od nuly. (Nulou nelze dělit !)	Lomený výraz má smysl pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je výraz ve jmenovateli různý od nuly. (Nulou nelze dělit !)

Například: Určete, pro které hodnoty proměnných má lomený výraz smysl.

$$\frac{4-x}{2x+3} \quad \text{výraz má smysl, je-li výraz } 2x+3 \neq 0$$
$$2x \neq -3$$
$$x \neq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{y^2 - x^2} \quad \text{výraz má smysl, je-li výraz } y^2 - x^2 \neq 0$$
$$(y+x) \cdot (y-x) \neq 0$$
$$(y+x) \neq 0 \quad \text{a} \quad (y-x) \neq 0$$
$$x \neq -y \quad \text{a} \quad x \neq y$$

$$\frac{1-y^2}{1+y^2} \quad \text{výraz má smysl, je-li výraz } 1+y^2 \neq 0$$

tento výraz bude vždy kladný, protože **druhá mocnina každého čísla je číslo kladné**. Proto výraz má smysl pro všechna y .

Pro stručné vyjadřování je výraz **různý od nuly nebo nenulový výraz ten, z kterého jsou vyloučeny hodnoty proměnných, po jejichž dosažení je číselná hodnota výrazu rovna nule.**

Například výraz

$7-x$ je nenulový pro $x \neq 7$, výraz $5y^2$ pro $y \neq 0$ atd.

Krácení a rozšiřování lomených výrazů

<u>Zlomky</u>	<u>Lomený výraz</u>
Zlomek se nezmění, když se jeho čítec i jmenovatel vynásobí nebo vydělí stejným nenulovým číslem :	Lomený výraz se nezmění, když se jeho čítec i jmenovatel vynásobí nebo vydělí stejným nenulovým výrazem :
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}; b \neq 0, c \neq 0$	$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}; B \neq 0, C \neq 0$
$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$	$\frac{A}{B} = \frac{A : C}{B : C}$

Krácení lomených výrazů představuje zjednodušení (úpravu) těchto výrazů, aniž by se změnila hodnota lomeného výrazu. Jedná se o dělení výrazu v čitateli i ve jmenovateli nejvhodnějším společným dělitelem .

Jednočleny v lomených výrazech můžeme krátit přímo , protože představují vlastně násobení.

Například : $\frac{8x^3}{4x^2}$ společným dělitelem je $4x^2$ protože $\frac{8x^3}{4x^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot x^{2+1}}{4x^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x}{4x^2} = 2x$
pro $x \neq 0$

Hodnota výrazu $\frac{8x^3}{4x^2}$ pro $x = 2$ je $\frac{8 \cdot 2^3}{4 \cdot 2^2} = \frac{8 \cdot 8}{4 \cdot 4} = \frac{64}{16} = 4$

po úpravě na $2x$ je, pro $x = 2$, hodnota rovna $2 \cdot 2 = 4$

$\frac{72x^2y^4z^3}{84x^3y^4z}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$

$\frac{72x^2y^4z^3}{84x^3y^4z} = \frac{12 \cdot 6 \cdot x^2 \cdot y^4 \cdot z \cdot z^2}{12 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot x \cdot y^4 \cdot z} = \frac{6 \cdot z^2}{7 \cdot x} = >$ společný dělitel je výraz $12 \cdot x^2 \cdot y^4 \cdot z$

Hodnota výrazu pro $x, y, z = 1$ před úpravou $\frac{72x^2y^4z^3}{84x^3y^4z} = \frac{72}{84} = 0,857142$

po úpravě $\frac{6 \cdot z^2}{7 \cdot x} = 0,857142$

Je – li v čitateli i ve jmenovateli více členů ve tvaru sčítání nebo odčítání, nelze provádět krácení !!!
Čitatele , popřípadě i jmenovatele **nutno rozložit na součin** buď vytykáním, pomocí vzorců, atd. a **potom teprve krátit** .

Například : Zjednodušte výraz $\frac{18a - 30}{12a^2 - 20a}$, $a \neq 0$; $a \neq \frac{5}{3}$ potom platí

$\frac{18a - 30}{12a^2 - 20a} = \frac{6 \cdot (3a - 5)}{4a \cdot (3a - 5)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot (3a - 5)}{2 \cdot 2a \cdot (3a - 5)} = \frac{3}{2a}$ společný dělitel je výraz $2 \cdot (3a - 5)$

Například: Zjednodušte výraz $\frac{3x^2 - 3xy}{x^2 - y^2}$, $x \neq y$, $x \neq -y$ potom platí

$$\frac{3x^2 - 3xy}{x^2 - y^2} = \frac{3x(x - y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{3x}{x + y} \quad \text{společný dělitel je výraz } (x - y)$$

Příklad: Upravte rozdělením na součet dvou zlomků s možností krácení :

a) $\frac{a + 2x}{a + x}$ b) $\frac{x^2 - y}{x}$ c) $\frac{14a + 1}{7}$ d) $\frac{12b - 3}{6}$
e) $\frac{35 + x}{5}$ f) $\frac{x^2}{x^2 + 1}$ g) $\frac{u^2 - 1}{u}$ h) $\frac{2a - b}{a - b}$

Řešení:

$$a) \frac{a + 2x}{a + x} = \frac{a + x + x}{a + x} = \frac{a + x}{a + x} + \frac{x}{a + x} = 1 + \frac{x}{a + x}$$

$$b) \frac{x^2 - y}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{y}{x} = x - \frac{y}{x}$$

$$c) \frac{14a + 1}{7} = \frac{14a}{7} + \frac{1}{7} = 2a + \frac{1}{7}$$

$$d) \frac{12b - 3}{6} = \frac{12b}{6} - \frac{3}{6} = 2b - \frac{1}{2}$$

$$e) \frac{35 + x}{5} = \frac{35}{5} + \frac{x}{5} = 7 + \frac{x}{5}$$

$$f) \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + \overbrace{1 - 1}^0}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$g) \frac{u^2 - 1}{u} = \frac{u^2}{u} - \frac{1}{u} = u - \frac{1}{u}$$

$$h) \frac{2a - b}{a - b} = \frac{a + a - b}{a - b} = \frac{a}{a - b} + \frac{a - b}{a - b} = \frac{a}{a - b} + 1$$

Rozšiřování lomených výrazů je násobení čitatele i jmenovatele nenulovým výrazem .

Příklad: Rozšiřte dané lomené výrazy tak, aby měly stejné jmenovatele :

a) $\frac{3x}{2y}; \frac{1}{xy}$ b) $\frac{2}{x + 1}; \frac{x}{1 - x}$ c) $\frac{y}{y^2 - 1}; \frac{y}{y - 1}$

Řešení:

a) $\frac{3x}{2y}$ rozšíříme x ; $\frac{1}{xy}$ rozšíříme 2

$$\frac{3x \cdot x}{2y \cdot x} = \frac{3x^2}{2xy}$$

$$\frac{1 \cdot 2}{xy \cdot 2} = \frac{2}{2xy}$$

b) $\frac{2}{x+1}$ rozšíříme výrazem $1-x$; $\frac{x}{1-x}$ rozšíříme výrazem $x+1$

$$\frac{2 \cdot (1-x)}{(x+1) \cdot (1-x)} = \frac{2-2x}{(x+1)(1-x)}$$

$$\frac{x \cdot (x+1)}{(1-x) \cdot (x+1)} = \frac{x^2+x}{(x+1)(1-x)}$$

c) Protože $y^2 - 1 = (y+1) \cdot (y-1)$, stačí rozšířit pouze výraz $\frac{y}{y-1}$, a to dvojčlenem $(y+1)$

$$\frac{y}{y^2-1} = \frac{y}{(y+1)(y-1)}$$

$$\frac{y \cdot (y+1)}{(y-1) \cdot (y+1)} = \frac{y^2+y}{(y+1)(y-1)}$$

Sčítání a odčítání lomených výrazů

Zlomky	Lomené výrazy
Zlomky s různými jmenovateli sečteme (odečteme) tak, že je převedeme na společného jmenovatele :	Lomené výrazy s různými jmenovateli sečteme (odečteme) tak, že je převedeme na společného jmenovatele :
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{AD + BC}{BD}$
$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad - bc}{bd}$	$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} - \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{AD - BC}{BD}$
$b \neq 0 ; c \neq 0$	$B \neq 0 ; C \neq 0$

Příklady :

Vypočítejte :

a) $\frac{5}{a} - \frac{2}{a+1}$

b) $\frac{5}{a} - \frac{2}{a^2+a}$

c) $\frac{3}{y-7} + \frac{y}{7-y}$

d) $\frac{3}{2} + \frac{r-3}{4r}$

e) $\frac{x+1}{4-x^2} + \frac{x-1}{2x+4}$

Řešení :

a) $\frac{5}{a} - \frac{2}{a+1} = \frac{5 \cdot (a+1) - 2a}{\underbrace{a \cdot (a+1)}_{\text{společ. jmenovatel}}} = \frac{5a+5-2a}{a \cdot (a+1)} = \frac{3a+5}{a^2+a}$ pro $a \neq 0; a \neq -1$

b) $\frac{5}{a} - \frac{2}{a^2+a} = \frac{5}{a} - \frac{2}{a \cdot (a+1)} = \frac{5 \cdot (a+1) - 2}{\underbrace{a \cdot (a+1)}_{\text{společ. jmenovatel}}} = \frac{5a+5-2}{a \cdot (a+1)} = \frac{5a+3}{a^2+a}$

pro $a \neq 0; a \neq -1$

$$c) \frac{3}{y-7} + \frac{y}{7-y} = \frac{3}{y-7} - \frac{y}{y-7} = \frac{3-y}{\underbrace{y-7}_{\text{společ. jmenovatel}}} \quad \text{platí pro } y \neq 7$$

$$d) \frac{3}{2} + \frac{r-3}{4r} = \frac{3 \cdot 2r + (r-3)}{4r} = \frac{6r+r-3}{4r} = \frac{7r-3}{4r} \quad \text{platí pro } r \neq 0$$

$$e) \frac{x+1}{4-x^2} + \frac{x-1}{2x+4} = \frac{x+1}{(2+x)(2-x)} + \frac{x-1}{2(x+2)} = \frac{(x+1) \cdot 2 + (x-1)(2-x)}{2(2+x)(2-x)} =$$

$$= \frac{2x+2+2x-x^2-2+x}{2(2+x)(2-x)} = \frac{5x-x^2}{2(4-x^2)} \quad \text{platí pro } x \neq \pm 2$$

Při sčítání a odčítání lomených výrazů se uplatňuje **společný násobek jmenovatelů** jako při sčítání číselných zlomků. U výrazů je zvlášť důležité, aby to byl **vhodný společný násobek**, jinak snadno úlohu zkomplikujeme. Jednotlivé činitele násobku získáme rozkladem výrazů.

Například: Určete vhodný společný násobek výrazů : a) $A = 3a - 6$, $B = 5a - 10$
b) $A = u^2 - v^2$, $B = u^2 + 2uv + v^2$
c) $A = 2x^2 - 6x + 4$, $B = 12x^2 - 12$

Řešení :

$$a) \quad A = 3a - 6 = 3 \cdot (a - 2)$$

$$B = 5a - 10 = 5 \cdot (a - 2)$$

$$\underline{n(A, B) = 3 \cdot 5 \cdot (a - 2)}$$

$$b) \quad A = u^2 - v^2 = (u + v) \cdot (u - v)$$

$$B = u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$$

$$\underline{n(A, B) = (u + v)^2 \cdot (u - v)}$$

$$c) \quad A = 2x^2 - 6x + 4 = 2 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 2 \left(x^2 - 3x + \frac{3^2}{2^2} - \frac{3^2}{2^2} + 2 \right) =$$

$$= 2 \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] = 2 \left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2(x - 1) \cdot (x - 2)$$

$$B = 12x^2 - 12 = 12 \cdot (x^2 - 1) = 12 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) =$$

$$= 2^2 \cdot 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$\underline{n(A, B) = 2^2 \cdot 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)}$$

Příklad : Určete vhodný společný násobek výrazů : $x^2y - xy^2$; $x^2 - y^2$

$$A = x^2y - xy^2 = xy \cdot (x - y)$$

$$B = x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

$$\underline{n(A, B) = xy \cdot (x + y) \cdot (x - y)}$$

Násobení a dělení lomených výrazů

Zlomky	Lomené výrazy
Zlomky násobíme tak, že násobíme čitatele čitatelem a jmenovatele jmenovatelem :	Lomené výrazy násobíme tak, že násobíme čitatele čitatelem a jmenovatele jmenovatelem :
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$	$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, $B \neq 0$, $D \neq 0$
Zlomky dělíme tak, že násobíme zlomkem převráceným :	Lomené výrazy dělíme tak, že násobíme výrazem převráceným :
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$	$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$

Lomené výrazy před násobením nejprve krátíme, pokud je to možné . Krátit můžeme kteréhokoli čitatele proti kterémukoli jmenovateli . Při dělení výrazů provádíme krácení až po převodu na násobení . Proto se výrazy v čitatelích a ve jmenovatelích před krácením rozkládají .

Při násobení lomeného výrazu mnohočlenem (nelomeným výrazem) postupujeme tak, že tímto mnohočlenem násobíme pouze čitatele lomeného výrazu.

- Příklady :
- ▶ $\frac{4u}{u+v} \cdot \frac{2u}{v} = \frac{4u \cdot 2u}{(u+v) \cdot v} = \frac{8u^2}{uv+v^2}$ pro $u \neq -v$, $v \neq 0$
 - ▶ $\frac{a-4}{10} \cdot 5 = \frac{a-4}{10} \cdot \frac{5}{1} = \frac{a-4}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a-4}{2}$
 - ▶ $\frac{10a^2b^2}{x+y} \cdot (5x+5y) = \frac{10a^2b^2 \cdot (5x+5y)}{x+y} = \frac{10a^2b^2 \cdot 5(x+y)}{x+y} =$
 $= \frac{10a^2b^2 \cdot 5}{1} = 50a^2b^2$
 - ▶ $3ab \cdot \frac{a-3}{9b^2} = a \cdot \frac{a-3}{3b} = \frac{a \cdot (a-3)}{3b} = \frac{a^2-3a}{3b}$ pro $b \neq 0$
 - ▶ $\frac{15a^2}{8b} : \frac{9a}{4b^2} = \frac{15a^2}{8b} \cdot \frac{4b^2}{9a} = \frac{3 \cdot 5 \cdot a \cdot a}{2 \cdot 4 \cdot b} \cdot \frac{4 \cdot b \cdot b}{3 \cdot 3 \cdot a} = \frac{5a}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{5ab}{6}$
 - ▶ $\frac{x^2+x}{2y} : \frac{x+1}{xy} = \frac{x \cdot (x+1)}{2y} \cdot \frac{xy}{x+1} = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{1} = \frac{x^2}{2}$
 - ▶ $\left(\frac{4ab^2}{c} \cdot 6bc \right) : \frac{6b^3}{a^3c^3} = \left(\frac{4ab^2}{c} \cdot \frac{6bc}{1} \right) \cdot \frac{a^3c^3}{6b^3} = \frac{4 \cdot 6 \cdot a \cdot b^3}{1} \cdot \frac{a^3c^3}{6b^3} = \frac{4 \cdot a \cdot a^3 \cdot c^3}{1} = 4a^4c^3$
 - ▶ $\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) : \left(1 - \frac{a}{b} \right) = \frac{b^2 - a^2}{b^2} : \frac{b-a}{b} = \frac{(b+a) \cdot (b-a)}{b^2} \cdot \frac{b}{b-a} = \frac{b+a}{b}$

Složené lomené výrazy

Složeným zlomkem rozumíme zlomek, jehož čítecil nebo jmenovatel je zlomek; složený zlomek je jiný zápis podílu dvou zlomků :

$$\text{Složený zlomek : } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \quad \text{Složený lomený výraz : } \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} =$$

Ze zlomkových čar, které jsou v zápisu složeného zlomku nebo složeného lomeného výrazu, vyjadřuje **hlavní zlomková čára**, který z výrazů je čítecil a který jmenovatel. Hlavní zlomková čára se píše delší než ostatní zlomkové čáry a **vždy ve stejné úrovni jako znaménko rovnosti**.

Jak složený lomený výraz zjednodušíme ?

a) Provedeme dělení naznačené hlavní zlomkovou čarou :

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

b) Součin vnějších členů lomíme součinem vnitřních členů :

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Příklady : Zjednodušte složené výrazy :

a) $\frac{\frac{9a}{5b}}{\frac{3a^2}{4b^2}} = \frac{9a \cdot 4b^2}{5b \cdot 3a^2} = \frac{3 \cdot 4b}{5 \cdot a} = \frac{12b}{5a} ; \quad a \neq 0 , b \neq 0$

b) $\frac{\frac{5a}{2b}}{\frac{3c}{1}} = \frac{5a}{2b} = \frac{5a \cdot 1}{2b \cdot 3c} = \frac{5a}{6bc} ; \quad b \neq 0 , c \neq 0$

c) $\frac{\frac{5a}{2b}}{\frac{3c}{1}} = \frac{5a}{2b} = \frac{5a \cdot 3c}{2b \cdot 1} = \frac{15ac}{2b} ; \quad b \neq 0 , c \neq 0$

d) $\frac{\frac{1+x}{y}}{\frac{x^2-1}{y^2}} = \frac{(1+x) \cdot y^2}{y \cdot (x^2-1)} = \frac{(1+x) \cdot y^2}{y \cdot (x+1) \cdot (x-1)} = \frac{y}{x-1} ; \quad x \neq \pm 1 , y \neq 0$

$$e) \frac{x - \frac{9}{x}}{x + 3} = \frac{\frac{x^2 - 9}{x}}{x + 3} = \frac{\frac{(x + 3)(x - 3)}{x}}{\frac{x + 3}{1}} = \frac{(x + 3)(x - 3) \cdot 1}{x(x + 3)} = \frac{x - 3}{x}$$

pro $x \neq 0$, $x \neq -3$

$$f) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{\frac{b - a}{a \cdot b}}{\frac{b^2 - a^2}{a^2 \cdot b^2}} = \frac{(b - a)(ab)^2}{ab(b^2 - a^2)} = \frac{(b - a)(ab)^2}{ab(b + a)(b - a)} = \frac{ab}{b + a}$$

pro $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$

Příklady k procvičení.

$$\blacktriangleright (s - t) : \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) = \quad [-st], s \neq 0, t \neq 0, s \neq t$$

$$\blacktriangleright \frac{(x + y)^2}{x^2 - y^2} \cdot (x - y) = \quad [x + y], x \neq \pm y$$

$$\blacktriangleright \left(\frac{3}{x} + 1 \right) \cdot \frac{x^2}{x^2 - 9} = \quad \left[\frac{x}{x - 3} \right], x \neq 0, x \neq \pm 3$$

$$\blacktriangleright \left(3 + \frac{1}{x} \right) : \frac{9x^2 - 1}{x^2} = \quad \left[\frac{x}{3x - 1} \right], x \neq 0, x \neq \pm \frac{1}{3}$$

$$\blacktriangleright \left(1 + \frac{1 - x}{x} \right) : \frac{1}{x} = \quad [1], x \neq 0$$

$$\blacktriangleright \left[\frac{p^2 q^{-3}}{r^2} \cdot \frac{s^{-1}}{(pq)^3} \right] : \left[\left(\frac{r}{s} \right)^2 \right]^{-1} = \quad [p^{-1} q^{-6} s^{-3}], p, q, r, s \neq 0$$