TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM
A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČR

KVADRATICKÉ ROVNICE

Def.: *Kvadratická rovnice o jedné neznámé x* se nazývá každá rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na tvar $ax^2 + bx + c = 0$,
kde a je reálné číslo různé od 0, b,c jsou libovolná reálná čísla.

Poznámka: ax^2 – kvadratický člen, bx – lineární člen, c – absolutní člen,
a, b, c – koeficienty, x – neznámá
$ax^2 + bx + c$ – kvadratický trojčlen

Rovnici převedeme na anulovaný tvar a dále použijeme některou z možností řešení:

I. Řešení pomocí diskriminantu
II. Vztah mezi kořeny a koeficienty kvadr. rovnice
III. Řešení doplněním na čtverec

Poznámka: Tyto metody lze použít i při řešení neúplných kvadratických rovnic, ale postup je zbytečně zdlouhavý a namáhavý.

Řešení pomocí diskriminantu

Def.: *Diskriminant* kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je výraz **b² – 4ac** a značíme jej D.

Diskriminant rozhoduje o kořenech rovnice:

Je-li **D < 0**, rovnice **nemá v R řešení**

Je-li **D = 0**, má rovnice jeden dvojnásobný kořen $x = -\frac{b}{2a}$

Je-li **D > 0**, má rovnice dva reálné kořeny $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Příklad: V R řešte pomocí D dané rovnice:

a) $2x^2 - x - 6 = 0$
b) $2x^2 - x + 6 = 0$
c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Řešení:

a) a = 2, b = -1, c = -6
D = b² – 4ac = (-1)² - 4·2·(-6) = 1 + 48 = <u>49</u> > 0 ⇒ 2 řešení

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1+\sqrt{49}}{2\cdot 2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-\sqrt{49}}{2\cdot 2} = -\frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{K = \left\{2; -\frac{3}{2}\right\}}}$$

b) a = 2, b = -1, c = 6
D = (-1)² - 4·2·6 = 1 - 48 = -47 < 0 ⇒ $\underline{\underline{K = \emptyset}}$

c) a = 1, b = -2, c = 1
D = (-2)² - 4·1·1 = 4 - 4 = 0 ⇒ 1 řešení: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1$ ⇒ $\underline{\underline{K = \{1\}}}$

Cvičení:
V oboru reálných čísel řešte pomocí diskriminantu:

a) $16x^2 - 8x + 1 = 0$
b) $3x + x^2 + 4 = 0$
c) $3z^2 - 4 - z = 0$
d) $x^2 + 1{,}5x - 4{,}5 = 0$
e) $4x = 4x^2 - 1$
f) $19x = 7x^2$
g) $(4x - 3)^2 = (3x + 2)^2$
h) $7x(x - 3) = -2(x^2 + 5)$
i) $(2x + 1)(x + 2) = 2(5 + 2x)$
j) $(x + 3)(x - 2) = (3x + 2)(4x - 3)$
k) $\frac{1}{2u} = u + 0{,}5$
l) $2x - 1 + \frac{1}{2x+1} = 2$

Vztah mezi kořeny a koeficienty kvadr. rovnice (VKK)

Příklad: Řešte kvadratickou rovnici $3x^2 + x - 10 = 0$.

Řešení: $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -2$

$x_1 + x_2 = -\frac{1}{3}$ | a = 3
$x_1 \cdot x_2 = -\frac{10}{3}$ | b = 1
| c = -10

Věta: Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c = 0$, pak pro ně platí:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Věta: Je-li kvadr. rovnice normovaná ($x^2+px+q = 0$), platí pro její kořeny Vietovy vzorce:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Příklad: Pomocí Vietových vzorců řešte rci $x^2-7x+12=0$

Řešení: $x_1 + x_2 = -p = 7$ $\quad$ 3+4 = 7

$x_1 \cdot x_2 = q = 12$ $\quad$ 2·6, (-2)·(-6), 3·4, (-3)·(-4), 1·12

K = {3; 4}

Poznámka: Uvedené věty platí i obráceně:
Nechť $a, b, c \in \mathrm{R} \wedge a \neq 0$. Pak čísla x_1, x_2, pro která platí $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2+bx+c = 0$.

Příklad: Určete *b*, *c* tak, aby čísla 3 a -0,5 byla kořeny kvadratické rovnice $2x^2+bx+c = 0$.

Řešení: $x_1 = 3$, $x_2 = -0{,}5$

$$\left.\begin{array}{l} 3 + (-0{,}5) = -\frac{b}{2} \Longrightarrow b = -5 \\ 3 \cdot (-0{,}5) = \frac{c}{2} \Longrightarrow c = -3 \end{array}\right\} \quad \underline{\underline{2x^2 - 5x - 3 = 0}}$$

Řešení doplněním na čtverec

Rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ převedeme na tvar $a.(x^2 + b'x + c') = 0$, vydělíme a a obsah závorky upravujeme $(x + b'/2)^2 - (b'/2)^2 + c' = 0 \rightarrow (x + p)^2 - q^2 = (x + p - q).(x + p + q) = (x - x_1).(x - x_2)$

x_1 a x_2 jsou hledanými kořeny rovnice

Příklad: Doplněním na čtverec řešte rovnici $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Řešení: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=$

$$=\left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=(x+2)\cdot(x+1)=0$$

$x + 2 = 0$ $\qquad$ $x + 1 = 0$

$x = -2$ $\qquad$ $x = -1$

$\mathrm{K} = \{-1;-2\}$

Rozklad kvadratického trojčlenu

Def.: Nechť je dána kvadratická rovnice $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ s kořeny $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$.

Pak lze kvadratický trojčlen zapsat ve tvaru $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)}$

Příklad: Rozložte na součin lineárních členů: $2x^2 - 5x - 3$

Řešení: $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\cdot2\cdot(-3) = 49$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+\sqrt{49}}{2\cdot2}=3 \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-\sqrt{49}}{2\cdot2}=-\frac{1}{2}$$

$2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3)(x - (-0,5)) = 2(x - 3)(x + 0,5)$

Cvičení:

Příklad 1: Dané rovnice řešte doplněním na čtverec:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $x^2 + 11x + 24 = 0$
c) $10 = x^2 + 3x$
d) $7x = x^2 + 10$
e) $x^2 - 8x + 15 = 0$
f) $x^2 - 0,5 = 0,5x$

Příklad 2: Dané rovnice řešte pomocí VKK a kvadr. trojčleny zapište jako součin lineárních členů:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $x + x^2 - 6 = 0$
c) $2x^2 + 22x + 48 = 0$
d) $5 = 0,5x^2 + 1,5x$
e) $x^2 + 16 = -10x$
f) $x^2 + 8 = 9x$

Grafické řešení kvadratických rovnic

Rci převedeme na tvar $x^2 = -px - q$. Levou a pravou stranu rovnice vyjádřím jako funkci:
f_1: $y = x^2$, f_2: $y = -px - q$. Narýsujeme jejich grafy – parabolu a přímku. Hledáme průsečíky:

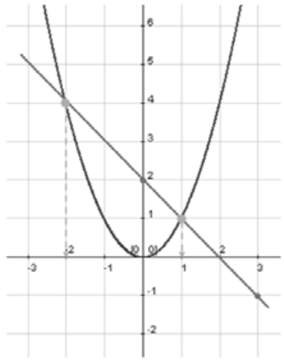
přímka je sečnou ⇒ 2 spol. body ⇒ rce má *2 řešení*
přímka je tečnou ⇒ 1 spol. bod ⇒ rce má *1 řešení*
žádný spol. bod ⇒ rce nemá *žádné řešení*

První souřadnice (x) společného bodu je řešením původní rovnice.

Příklad: Graficky řešte rovnici $x^2 + x - 2 = 0$.
Řešení: $x^2 = -x + 2$

f_1: $y = x^2$
f_2: $y = -x + 2$

x	0	3
y	2	-1



⇒ K = {-2; 1}